A5 & A6 – MAT B: 30/5 2016

Opgave 1

Der er givet funktionerne f og g med forskrifterne

$$f(x) = \sqrt{x}$$

og

$$g(x) = \ln(x^2 + 1)$$

a) Bestem definitionsmængderne $\mathrm{Dm}(f)$ og $\mathrm{Dm}(g)$

b) Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion $g \circ f$

c) Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion $f \circ g$

d) Kontrollér ved at indtegne graferne i GeoGebra

A5 & A6 – MAT B: 30/5 2016

Opgave 2

Der er givet funktionerne f og g med forskrifterne

$$f(x) = \sqrt{x}$$

og

$$g(x) = \ln(x^2 - 3)$$

a) Bestem definitionsmængderne $\mathrm{Dm}(f)$ og $\mathrm{Dm}(g)$
b) Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion $g \circ f$
c) Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion $f \circ g$
d) Kontrollér ved at indtegne graferne i GeoGebra

a)

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Vi kan ikke tage kvadratrod af negative tal (på Mat B).

Derfor er

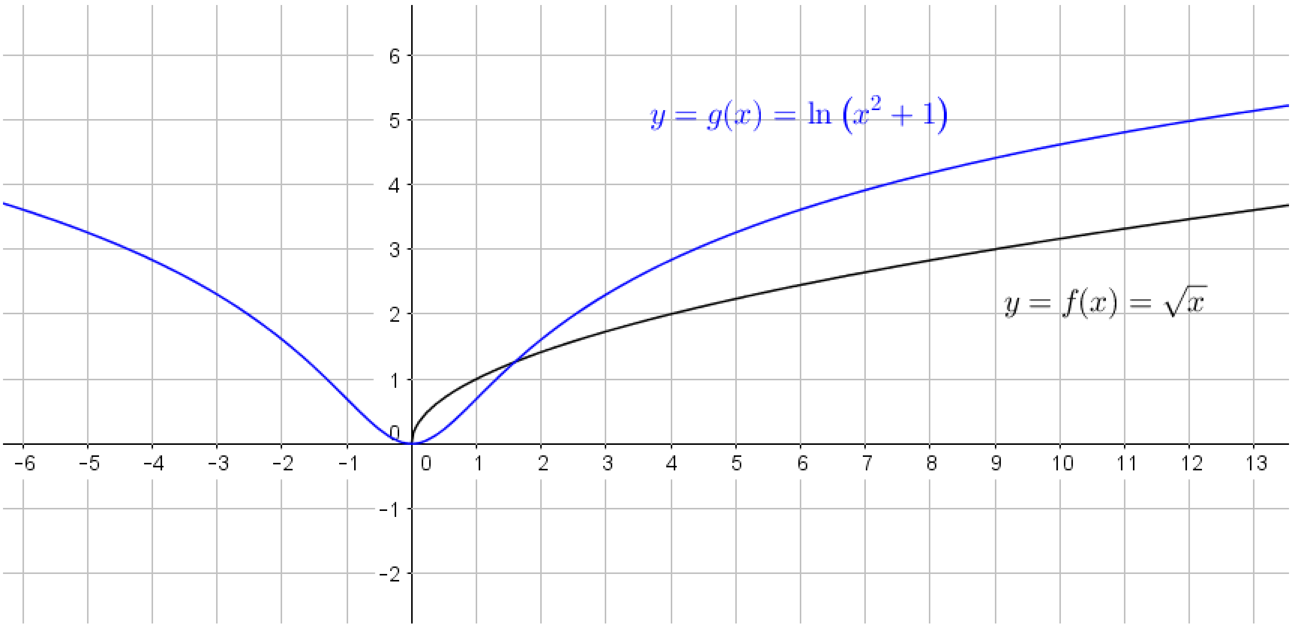
$$\underline{\underline{\mathrm{Dm}(f) = [0; \infty[}}$$

$$g(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Vi kan kun tage logaritme til positive tal, men da x^2 aldrig kan blive negativ, er $x^2 + 1$ altid større end 0.

Dermed kan vi konkludere at $\underline{\underline{\mathrm{Dm}(g) = \mathbb{R}}}$

Kontrol med GeoGebra



b)

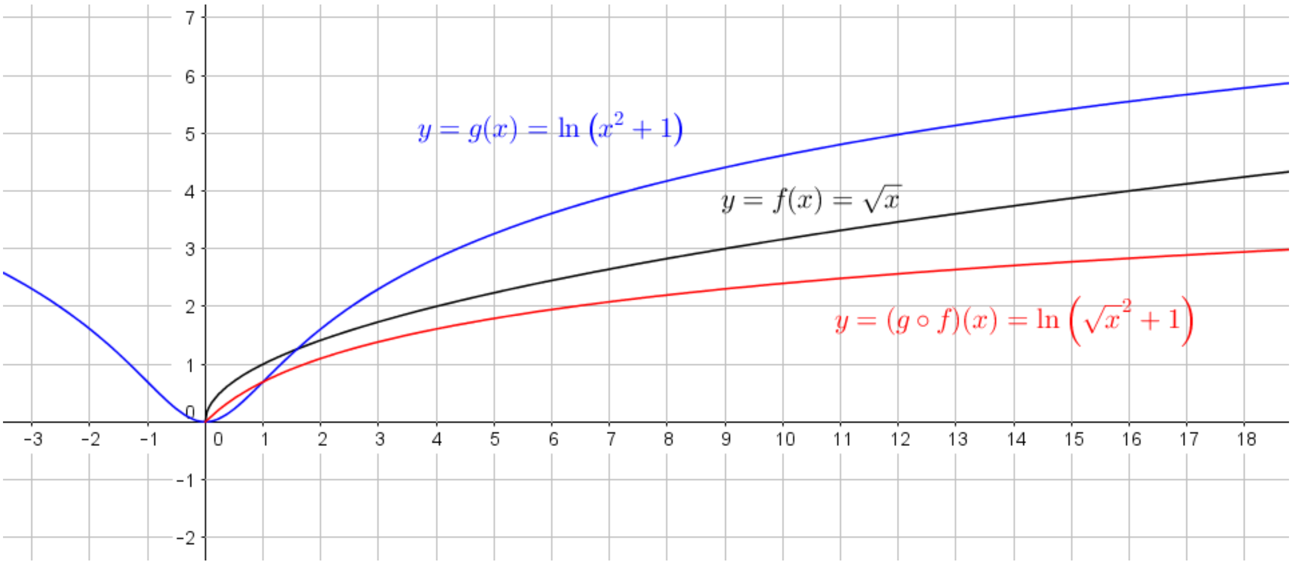
Definitionsmængden for den sammensatte funktion $g \circ f$

x skal først kunne sættes ind i f. Derfor må vi kræve at $x \geq 0$.

Dernæst skal $f(x)$ kunne sættes ind i g. Derfor må vi kræve at $f(x) \in \mathrm{Dm}(g) = \mathbb{R}$

Men det giver jo ikke yderligere krav til x, så derfor er $\underline{\underline{\mathrm{Dm}(g \circ f) = [0; \infty[}}$

Kontrol med GeoGebra:



c)

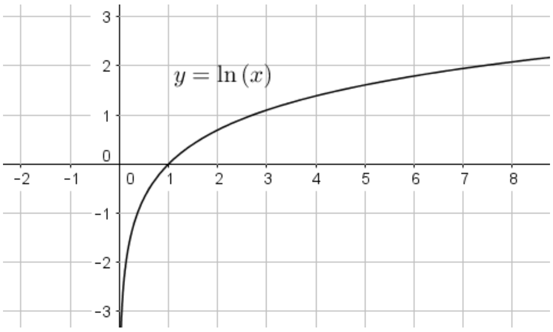
Definitionsmængden for den sammensatte funktion $f \circ g$

Da $Dm(g) = \mathbb{R}$ giver g ingen begrænsninger på x.

Men da $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ skal kunne sættes ind i f må vi sikre os at $g(x) \in Dm(f) = [0; \infty[$.

Derfor må vi yderligere kræve at $\ln(x^2 + 1) \geq 0$.

Tagner vi grafen for $y = \ln(x)$

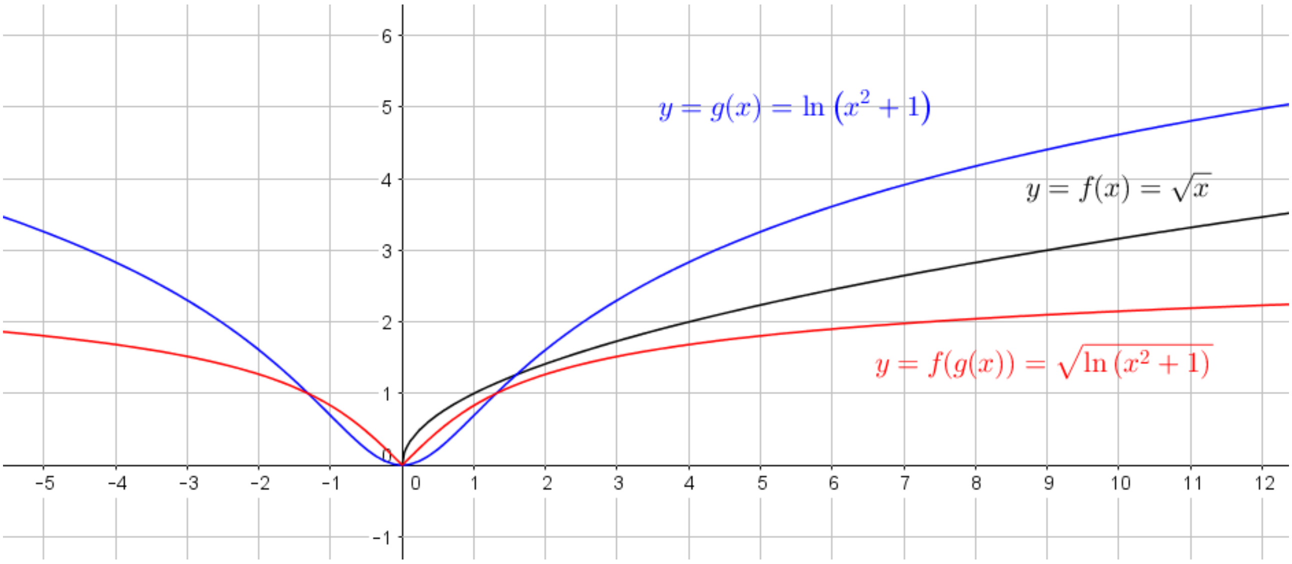


ser vi, at når ”inputtet” til ln er større end eller lig med 1, så er ”outputtet” større end eller lig med 0.

Men $x^2 + 1$ er jo altid større end eller lig med 1, så derfor kan vi konkludere at $\ln(x^2 + 1) \geq 0$ for alle tal $x \in \mathbb{R}$.

Derfor har vi $\underline{\underline{\mathrm{Dm}(f \circ g) = \mathbb{R}}}$

Grafisk kontrol med GeoGebra



a)

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Vi kan ikke tage kvadratrod af negative tal (på Mat B).

Derfor er

$$\underline{\underline{\mathrm{Dm}(f) = [0;\infty[}}$$

$$g(x) = \ln(x^2 - 3)$$

Vi kan kun tage logaritme til positive tal.

Derfor er kravet at $x^2 - 3$ skal være positivt, dvs. vi skal løse uligheden

$$x^2 - 3 > 0$$

Grafisk set er $y = x^2 - 3$ en "glad" parabel, der skærer x-aksen for $x = \pm\sqrt{3}$

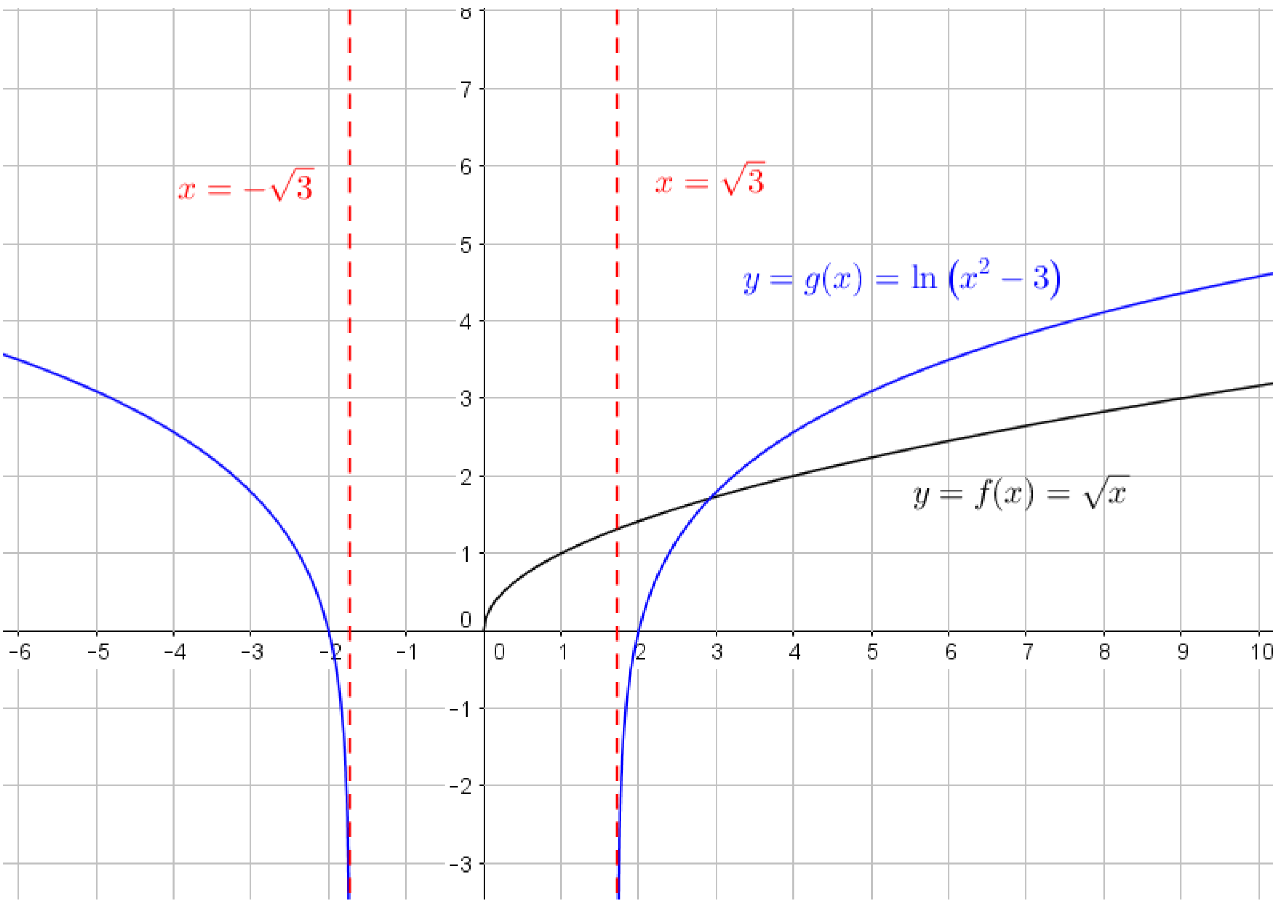
Dermed kan vi konkludere at

$$x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < x$$

Derfor er

$$\underline{\underline{\mathrm{Dm}(g) =]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};\infty[}}$$

Kontrol med GeoGebra



b)

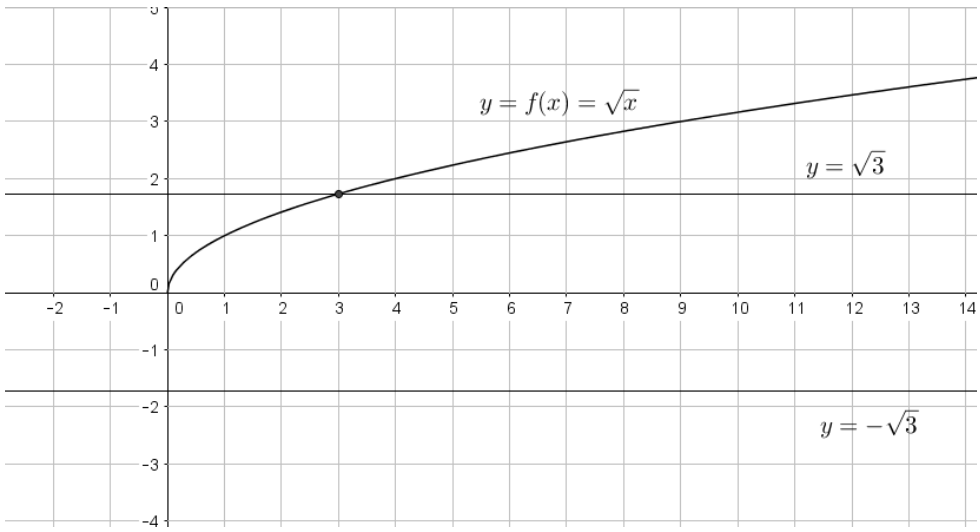
Definitionsmængden for den sammensatte funktion $g \circ f$

x skal først kunne sættes ind i f. Derfor må vi kræve at $x \geq 0$.

Dernæst skal $f(x)$ kunne sættes ind i g. Derfor må vi kræve at $f(x) \in \mathrm{Dm}(g)$

Om $f(x) = \sqrt{x}$ må vi derfor kræve at $\sqrt{x} < -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < \sqrt{x}$

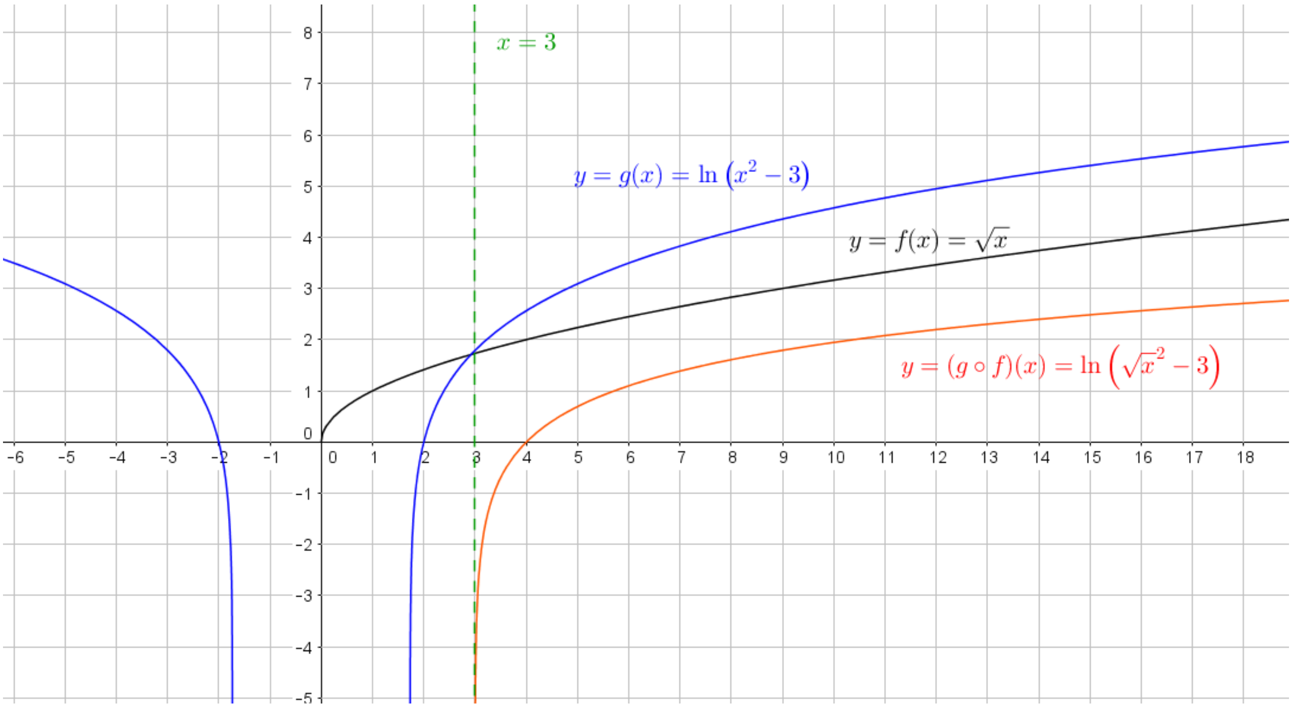
Fortolker vi denne ulighed grafisk, kan vi aflæse resultatet



Vi kan nemlig se at $y = \sqrt{x}$ enten skal ligge under $y = -\sqrt{3}$ eller over $y = \sqrt{3}$.

Det sker kun der, hvor $x > 3$. Samlet set betyder det, at $\underline{\underline{\mathrm{Dm}(g \circ f) =]3; \infty[}}$

Grafisk kontrol med GeoGebra



c)
Definitionsmængden for den sammensatte funktion $f \circ g$

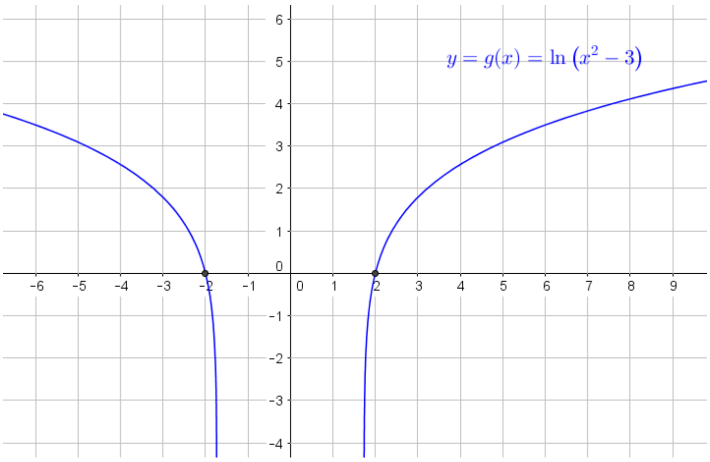
Først skal x kunne sættes ind i g. Dvs. $x < -\sqrt{3} \lor \sqrt{3} < x$ ifølge a)

Derefter skal $g(x) = \ln(x^2 - 3)$ kunne sættes ind i f.

Derfor må vi yderligere kræve at $\ln(x^2 - 3) \geq 0$.

"=" gælder, når $\ln(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Uligheden kan nu løses grafisk:



Deraf ses at $\ln(x^2 - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \lor 2 \leq x$

Dette krav er stærkere end kravet fra $\mathrm{Dm}(g)$ så vi ender med $\underline{\underline{\mathrm{Dm}(f \circ g) =]-\infty; 2] \cup [2; \infty[}}$

Grafisk kontrol med GeoGebra