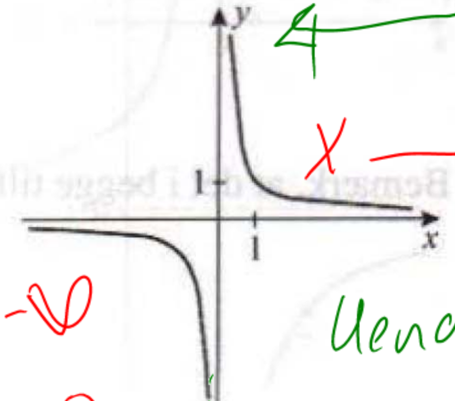
Grænseværdier

Et vigtigt – men lidt bøvlet begreb

Eksempel

På figuren her ser du grafen for funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad \mathrm{Dm}f = \mathrm{R}\backslash\{0\}$$



Grænseværdi i uendelig

$x \to \infty$ $f(x) \to 0$

Som du kan se, nærmer $f(x)$ sig nul, når x vokser (x går mod uendelig), og når x aftager (x går mod minus uendelig). Dette skrives således

$x \to -\infty$

$f(x) \to 0$

Uendelig grænseværdi

$x \to 0_+ : f(x) \to \infty$

„x går mod nul fra højre"

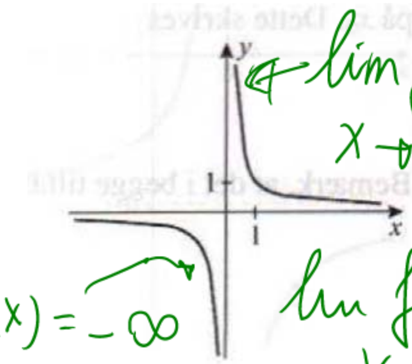
$x \to 0_- \quad f(x) \to -\infty$

Vi ser også, at $f(x)$ vokser (går mod uendelig), når x nærmer sig nul, og er positiv, dvs. når x nærmer sig nul fra højre, og at $f(x)$ aftager (går mod minus uendelig), når x nærmer sig nul, og er negativ, dvs. når x nærmer sig nul fra venstre. Vi skriver

„x går mod nul fra venstre"

3 forskellige typer af grænseværdier

- 10.1.2 Grænseværdi i uendelig

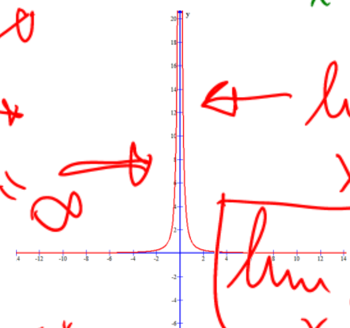


$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 0_-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ eksisterer ikke

- 10.1.3 Uendelig grænseværdi



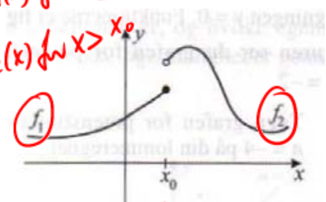
$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \infty$

$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \infty}$

- 10.1.6 Endelig grænseværdi
  ("Indvendig græseværdi")

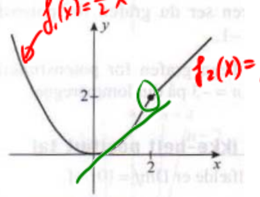
$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{for } x\le x_0 \\ f_2(x) & \text{for } x> x_0\end{cases}$



$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{for } x\le 2 \\ x & \text{for } x> 2\end{cases}$

$f_1(x)=\frac{1}{2}x^2$

$f_2(x)=x$



10.1.2 Grænseværdi i uendelig

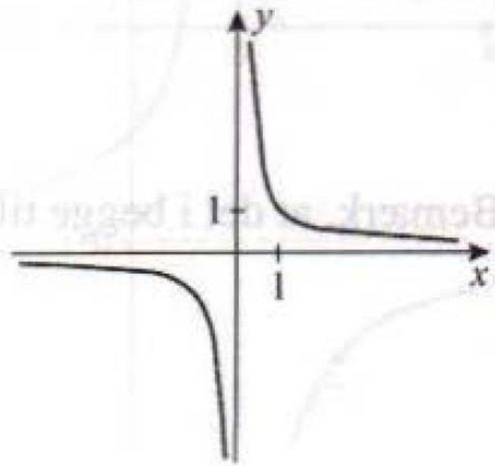
Definition – Grænseværdi i uendelig

Lad a være et reelt tal. En funktion f siges at have ***grænseværdien a i uendelig***, hvis $f(x)$ ligger vilkårligt tæt på a, når blot x er tilstrækkelig stor og positiv. Dette skrives

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

Lad b være et reelt tal. En funktion f siges at have ***grænseværdien b i minus uendelig***, hvis $f(x)$ ligger vilkårligt tæt på b, når blot x er tilstrækkelig stor og negativ. Dette skrives

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$



10.1.3 Uendelig grænseværdi

Definition – Uendelig grænseværdi

Lad x_0 være et reelt tal. En funktion f siges at have ***grænseværdien uendelig***, når x går mod x_0, hvis $f(x)$ bliver vilkårligt stor og positiv, når blot x er tilstrækkelig tæt på x_0. Dette skrives

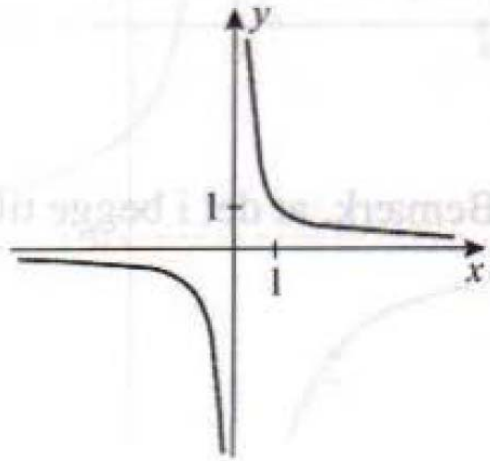
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

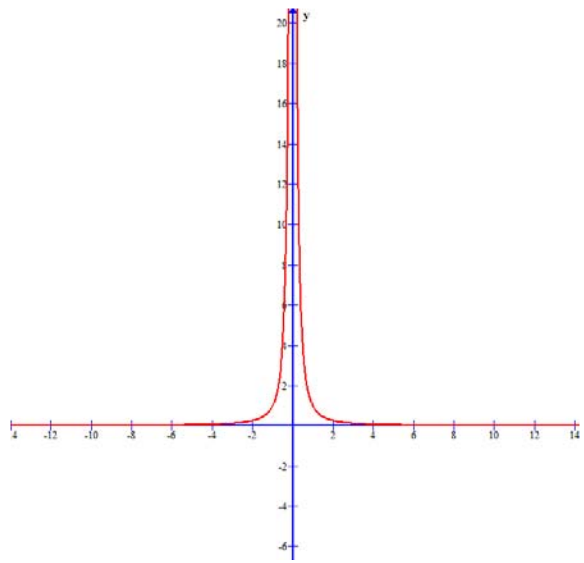
En funktion f siges at have ***grænseværdien minus uendelig***, når x går mod x_0, hvis $f(x)$ bliver vilkårligt stor og negativ, når blot x er tilstrækkelig tæt på x_0. Dette skrives

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Bemærk, at det i begge tilfælde er en betingelse (jvf. sætning 8.1.8), at

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = \lim_{x \to x_{0-}} f(x)$$



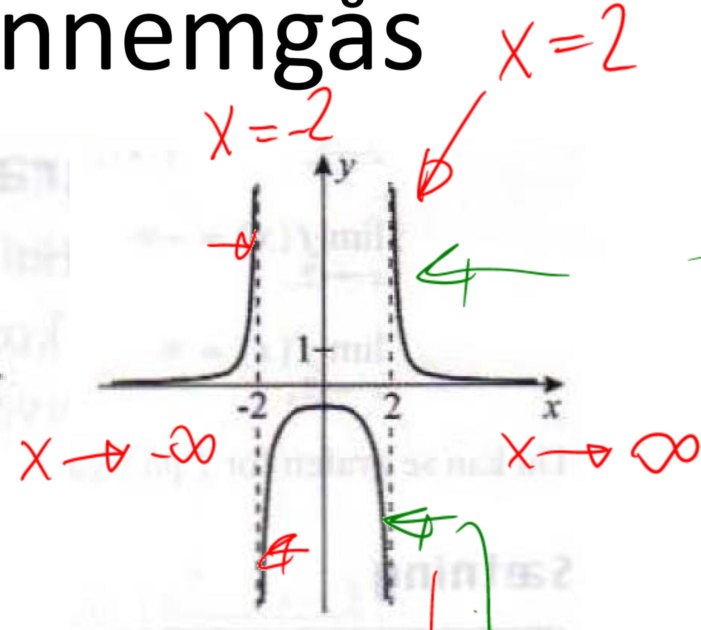


Eksempel 10.1.4 gennemgås

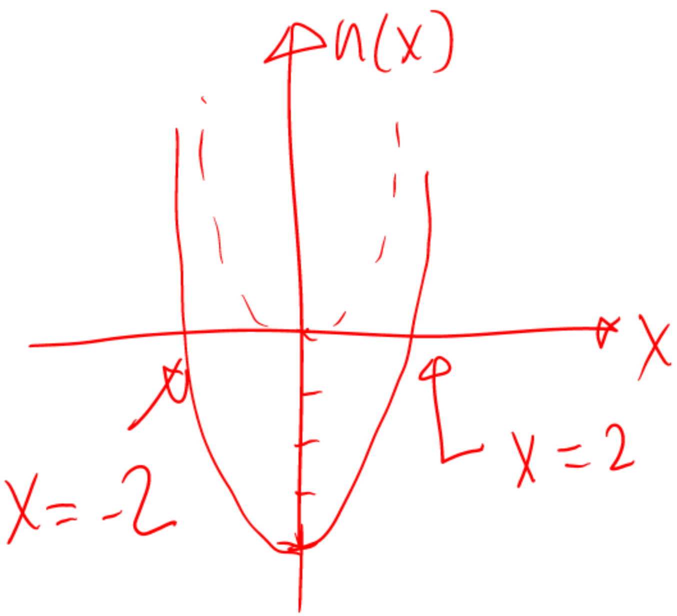
Eksempel

Du skal nu se nærmere på funktionen

$$f(x) = \frac{2}{x^2-4} \quad : \quad \mathrm{Dm}\,f = \mathrm{R}\setminus\{\pm 2\}$$



$n(x) = x^2 - 4$



$$\lim_{x\to -2_-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2_-} f(x) = -\infty$$

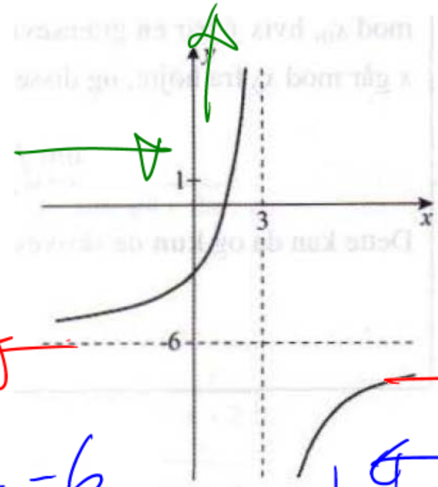
$$\lim_{x\to 2_+} f(x) = \infty$$

Eksempel 10.1.5 gennemgås

Eksempel

På figuren her kan du se grafen for funktionen

$$f(x) = \frac{6x-9}{3-x} \;\; ; \;\; \mathrm{Dm}f = \mathrm{R}\backslash\{3\}$$



$$f(x) = \frac{6x-9}{3-x} = \frac{\frac{6x-9}{x}}{\frac{3-x}{x}} = \frac{6-\frac{9}{x}}{\frac{3}{x}-1} \to \frac{6}{-1} = -6$$

$x \to \infty$: $\frac{9}{x} \to 0$, $\frac{3}{x} \to 0$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -6$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = -6$$

$$\lim_{x\to 3_-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 3_+} f(x) = -\infty$$

10.1.6 Endelig grænseværdi ("Indvendig græseværdi")

Definition – Endelig grænseværdi

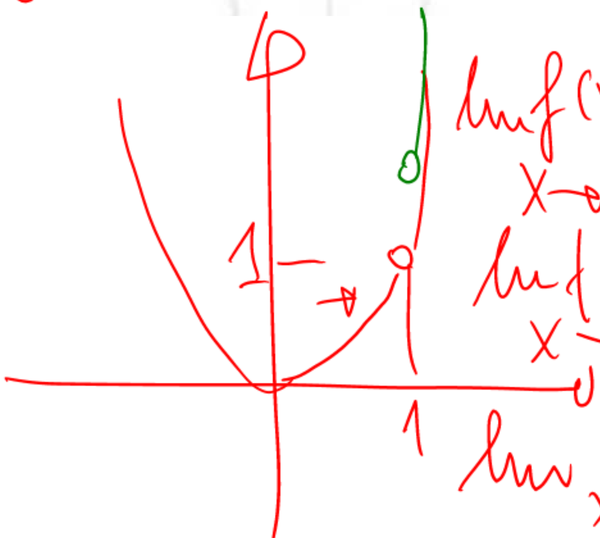
Lad a og x_0 være reelle tal. En funktion f siges at have ***grænseværdien*** a, når x går mod x_0, hvis $f(x)$ kommer vilkårligt tæt på a, når blot x er tilstrækkelig tæt på x_0. Dette skrives

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Bemærk, at det er en betingelse (jvf. sætning 10.1.8), at

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = \lim_{x \to x_{0-}} f(x)$$

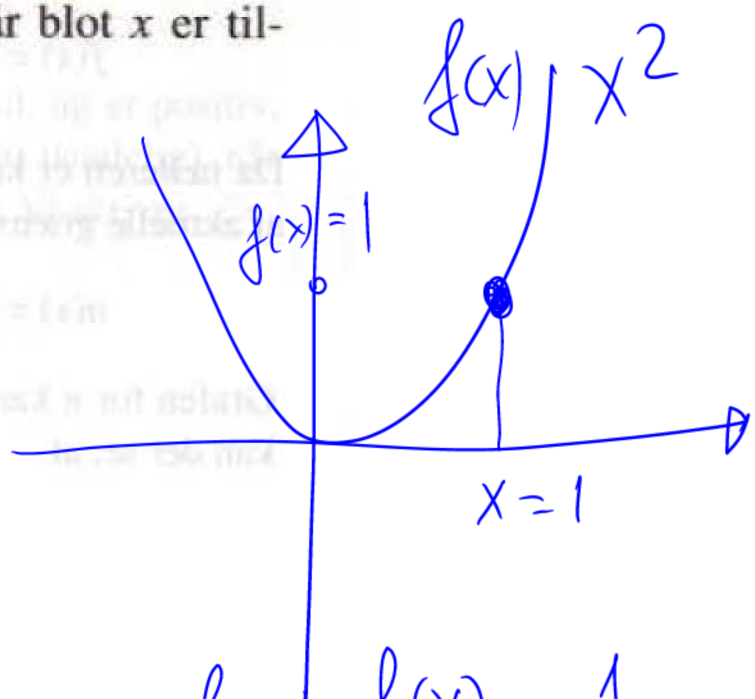
$f(x) = x^2$ for $x \neq 1$



$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$



$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Eksempel 10.1.7 gennemgås

Eksempel

Givet funktionen

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 - x - 6} \quad ; \quad \mathrm{Dm}f = \mathsf{R} \setminus \{-2, 3\}$$

Sætning 10.1.8

Lad x_0 være et reelt tal. En funktion f har en grænseværdi, når x går mod x_0, hvis f har en grænseværdi, når x går mod x_0 fra venstre, og når x går mod x_0 fra højre, **og** disse to grænseværdier er ens. Dvs. hvis

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = \lim_{x \to x_{0-}} f(x)$$

Dette kan da og **kun** da skrives

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Bemærk, jvf. ovenstående sætning, at for $x \to x_0$, hvor x_0 er et reelt tal, skal du **altid** bestemme grænseværdierne fra venstre og fra højre **hver for sig** (undtagen hvis f kun er defineret på den ene side af x_0).

Eksempel 10.1.9 gennemgås

Eksempel
Givet funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for} \quad x < 0 \\ x - 1 & \text{for} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Undersøger, hvad der "sker" omkring $x = 0$.

Eksempel 10.1.10 gennemgås

Eksempel

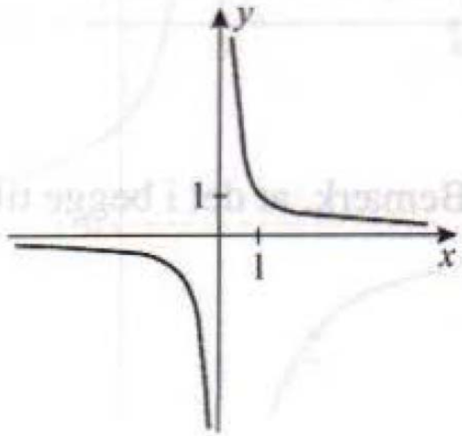
Du har tidligere i dette afsnit set, at der for funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \; \mathrm{Dm}f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

gælder, at

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 0_-} f(x) = -\infty$$

Funktionen har altså **ingen** grænseværdi når $x\to 0$.



Regn selv nu og til næste gang

- Øvelserne 10.1.10, 10.1.11, 10.1.12, 10.1.13, 10.1.14 0g 10.1.15