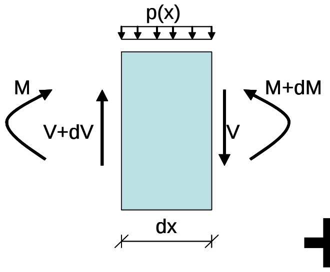
# Finite Element Method
# Stænger, GitreBjælker, Rammer og Søjler.

*oktober 2010,*
*JPU/LC*




**Bjælkens differentialligning**

+

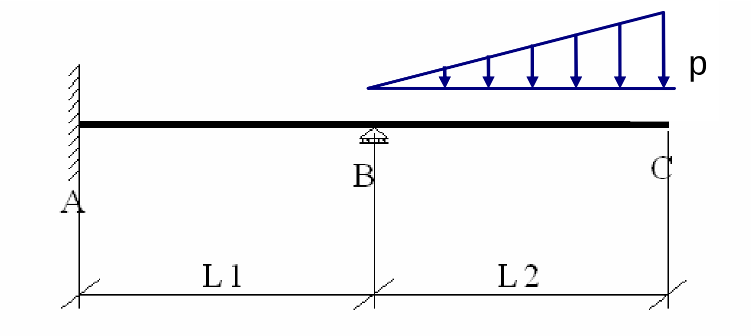
$$Ai = Ay$$

**Arbejdsligningen**

||

$$K \cdot u = U$$

**FEM formulering**



# Den Store Danske Encyklopædi fortæller om Finite Element Method:

**finite element metoden,** (af lat. *finitus* 'afsluttet, begrænset', af *finire* 'slutte', af *finis* 'slutning, ende'), *FEM*, computerbaseret teknisk beregningsmetode til løsning af partielle differential- og integralligninger. Metoden har siden 1952 haft en revolutionerende indflydelse på løsning af mange fysiske og ingeniørmæssige problemer, fx inden for faststofmekanik, varmetransmission, strømningslære samt elasticitets- og plasticitetsteori. Fælles for disse problemer er, at de kræver en feltbeskrivelse: et forskydningsfelt, et temperaturfelt, et magnetisk felt eller et strømningsfelt.

Forskningsarbejde udført af M. Turner og R. Clough (f. 1920) i 1952 ved Boeing-flyfabrikkerne vedrørende dynamisk beregning af flyvninger førte direkte mod FEM; dog havde R. Courant i 1940'erne fra en mere direkte matematisk synsvinkel arbejdet med FEM. Metodens udvikling er tidsmæssigt sammenfaldende med computerens. FEM er i praksis ikke anvendelig uden computerfaciliteter, og udviklingen af FEM-programmer har været direkte knyttet til udviklingen i computerhardware. Udviklingen i 1990'erne vedrører i høj grad mand-computersamspillet, dvs. interaktive grafiske værktøjer til formulering af problemet (preprocessing) og interaktive grafiske værktøjer til anskueliggørelse af beregningsresultater (post-processing).

Vigtige begreber for metodens beskrivelse er *knudepunkter* og *elementer*. I en gitter- eller rammekonstruktion, fx en højspændingsmast, er knudepunkterne de punkter, hvor stænger eller bjælker mødes, og elementerne er stængerne eller bjælkerne. I dette tilfælde svarer finite element modellen direkte til den fysiske virkelighed. I et kontinuum, fx et tandhjul, er knudepunkterne i en finite element model valgte, såvel i antal som i placering. Der er et endeligt antal, og da modellen beskrives ved knudepunkternes frihedsgrader, fx forskydningerne i rummets tre retninger, bliver der totalt et endeligt antal frihedsgrader. Elementerne i en finite element modellering af et kontinuum er også valgte, og valget er knyttet til de valgte knudepunkter, men ikke dermed entydigt. For todimensionale modeller anvendes ofte trekanter eller firkanter som elementer, og for tredimensionale modeller tilsvarende tetraedre og kasser.

FEM er baseret på en entydig forbindelse mellem feltstørrelserne i et elements knudepunkter og feltstørrelserne et vilkårligt sted i elementet. Matematisk er dette et interpolationsproblem: Er hjørnepunkternes værdier givet, hvad er da værdien i et vilkårligt punkt i elementet ? Fra en mere fysisk synsvinkel kan resultaterne udledes ved en antaget feltvariation, fx lineær variation for en trekant med kun knudepunkter i hjørnerne.

En væsentlig del af FEM er principielt ens for selv meget forskelligartede problemer, hvilket er en af grundene til metodens store udbredelse. Mange forskellige elementer er til rådighed, og begrebet isoparametrisk element bør nævnes. Det dækker over elementer, hvis facon beskrives på principielt samme måde som det aktuelle felt, dvs. ved knudepunktsværdier; dette muliggør fx krumme elementer, men nødvendiggør så anvendelse af numerisk integration.

Primært har FEM givet mulighed for beregning af konstruktioner med komplicerede faconer. I samspil med iterations- og/eller inkrementalmetoder løses også teknisk vigtige ulineære problemer, fx inden for faststofmekanik eksemplificeret ved ulineær materialeopførsel og kontaktproblemer. Inkrementalmetoder er karakteriseret ved en stepvis beregning, hvor fx belastninger antages at vokse trinvis. Iterationsmetoder har derimod fastholdte beregningsbetingelser, men i modsætning til direkte metoder bestemmes løsninger ved en gentagen tilstræbt forbedring af resultatet. Til dynamiske problemer anvendes inkrementalmetoder til simulering af transiente problemer, der er karakteriseret ved at problemets parametre ikke kan regnes konstante i tiden, fx er dette gældende ved opstart af maskineri og for indsvingning til mere stationære tilstande.

Computerprogrammer baseret på FEM blev oprindelig udviklet på universiteterne, men ret hurtigt etableredes virksomheder for at distribuere, dokumentere og videreudvikle programmerne. Disse internationale firmaer er baggrunden for den stadig voksende anvendelse af FEM, selv i mindre maskin- og bygningsvirksomheder. *PaPe*

# Indledning

Finite Element Method (FEM) er en beregningsmetode, der er udviklet til beregninger udført med computer.

Metodens grundtanke er, at de differentialligninger, der styrer mange af de fysiske problemstillinger, en ingeniør beskæftiger sig med, matematisk kan tilnærmes nogle matrixligninger.
En computer er ikke så god til at løse differentialligninger, mens den til gengæld er ret skrap til at behandle store talmængder så som matricer.
Gennem denne proces foretages nogle tilnærmelser, der gør det ekstra vigtigt at forholde sig kritisk til de resultater man får.

FEM beregninger bygger på, at alle legemer opbygges af knuder og elementer. Et stangelement er ét element, der har 2 knuder, nemlig en i hver ende. Hver knude har én frihedsgrad, nemlig deformation i stangens længde, da en stang kun kan optage kræfter i sin egen længdeakse. Disse beregninger er korrekte i forhold til de differentialligninger, man går ud fra. Altså en beregning af en stang er en eksakt beregning.
Såfremt stangen indgår i en gitterkonstruktion, kan den stadig kun optage kræfter i sin egen længde akse.
Hvis deformationerne ønskes betragtet ud fra et globalt koordinatsystem, vil en skrå stang derfor have 2 frihedsgrader til hver knude. x- og y-retningen

Et bjælkeelement består ligeledes af ét element og 2 knuder ligesom stangelementet.
Bjælkeelement regnes at kunne optage forskydningskræfter og momenter. Bjælkeelementet regnes ikke at optage normalkræfter, idet disse er gennemgået under stangelementer.
Hver knude i et bjælkeelement har 2 frihedsgrader, nemlig lodret flytning og vinkeldrejning.
Ved indførelse af et charnier indfører man en ekstra frihedsgrad i form af en ekstra vinkeldrejning i en knude.
Som udgangpunkt i et beregningsprogram er alle knuder indspændte. Charniers skal derfor altid påføres som ekstra frihedsgrader, der resulterer i større ligningssystemer.

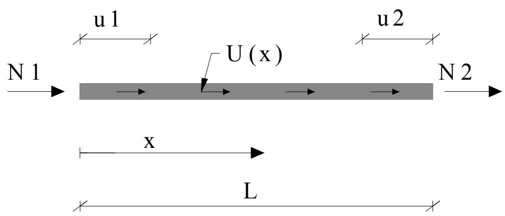
Hvis bjælkeelementet indgår i en ramme eller er skrå, vil frihedsgraderne ændre sig ud fra et globalt koordinatsystem. Bjælkeelemente bliver således til et rammeelement. Rammeelementet er stangelementet sat sammen med bjælkeelementet. Et rammeelement kan derfor optage normalkræfter, forskydningskræfter og momenter.
Både for stangelementer og rammeelementer gælder, at de kun kan sættes sammen via knuderne. Det kan ikke lade sig gøre at lade et bjælkeelement gå ind midt på et rammeelement. Det er nødvendigt at placere en ekstra knude i rammeelementet, hvor et andet element støder til.
Derimod kan man godt påføre an fordelt last, på et element uden for knuderne.

Søjleberegninger kan også udføres med FEM. Beregningen er noget anderledes end for rammeberegninger.
En søjleberegning resulterer ikke i nogle snitkræfter, men i en kritisk last, som søjlen kan optage inden der opstår udknækning.
Ved beregning af temperaturer og spændinger i flader er det nødvendigt at anvende såkaldte fladeelemnter.
Disse elementer er på opbygget af knuder i hjørnerne og en flade i mellem disse knuder.
Fladeelementerne kan være trekantede eller firkantede, og de kan indeholde forskelligt antal knuder.
De forskellige fladeelementer har forskellige egenskaber, og det er således ikke ligegyldigt, hvilket element man bruger til en bestemt beregning.
Ved anvendelse af fladeelementer kan de tilhørende differentialligninger sjældent løses eksakt. Derfor er FEM beregningen ikke eksakt, som for stænger, gitre, bjælker og rammer.
Resultatet er behæftet med usikkerhed, og det er derfor altid nødvendigt at foretage kontrol med forskellige typer elementer og forskellige antal elementer.

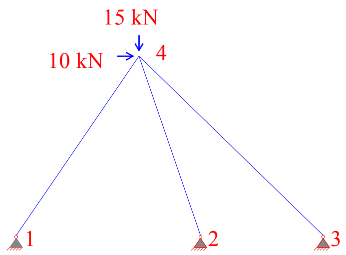
Ved alle FEM beregninger er det nødvendigt at forstå den bagvedliggende teori, for kritisk at kunne vurdere resultaterne. Selve FEM beregningen med et program, kan de fleste hurtigt lære at udføre. Det er vurderingen af resultaterne, der er det kritiske punkt. Ved at kende teorien er det også langt lettere at forstå de fejlmeddelelser, programmet kommer med.
Grundstrukturen i de fleste FEM programmer er ens, så når man har kendskab til ét af dem, er det ret hurtigt at sætte sig ind i et andet.

# EMNE

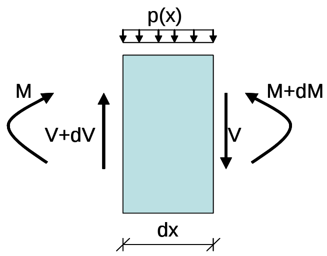
## 1. Stænger
- Hookes lov
- Stivhedsmatrice
- Opgaver



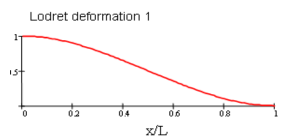

## 2. Gitterkonstruktioner
- Globale koordinater
- Global stivhedsmatrice
- Gitterkonstruktion
- Eksempel
- Opgave



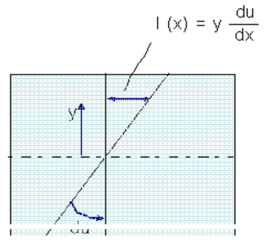

## 3. Bjælkens differentialligning
- Kræfter
- Deformationer




## 4. Fem formulering og Formfunktioner
- Definitioner
- Fortegnsdefinitioner

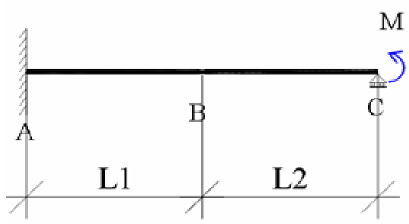



## 5. Arbejdsligningen
- Femformulering
- Enkeltkræfter
- Fordelt last



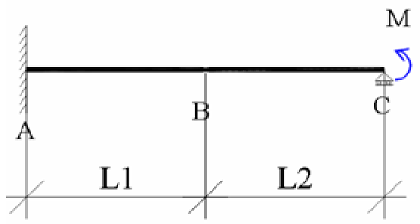

## 6. Eksempel
- 1 bjælkeelement
- Udkraget med enkeltkraft

## 7. Eksempel
- 2 bjælkeelementer
- Momentpåvirkning
- Elastisk løsning

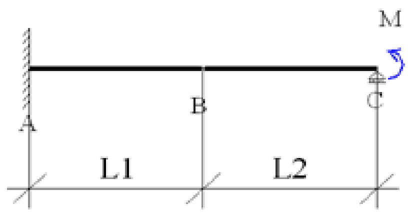


# EMNE

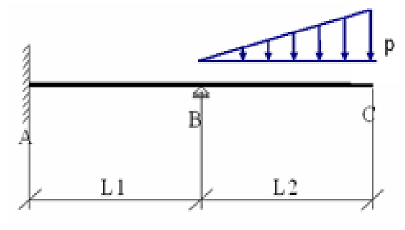
## 8. Eksempel
- 2 bjælkeelementer
- Mometpåvirkning
- Plastisk løsning



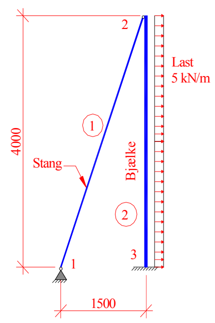

## 9. Eksempel
- 2 bjælkeelementer
- Mometpåvirkning
- Charnier




## 10. Eksempel
- 2 bjælkeelementer
- Fordelt last

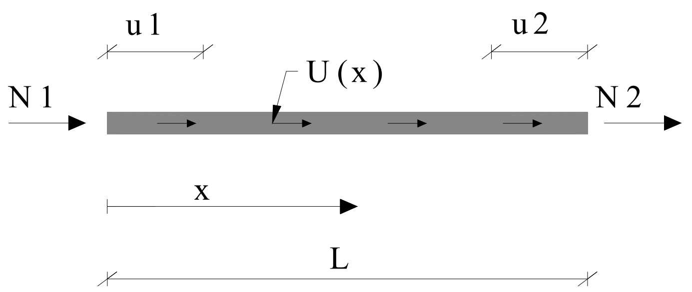



## 11. Skrå bjælker og rammer
- 2 elementer
- Fordelt last



# 1.0 Finite Element Method - Stænger.

## 1.1 Teori.

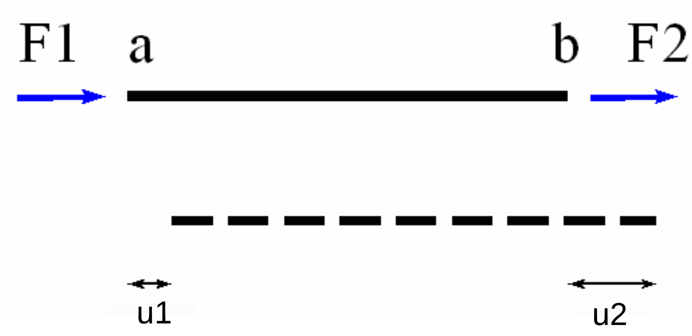



Symboler:

E er elasticitetsmodulet
A(x) er arealet, der kan være afhængig af x
u er deformationen
U(x) er en fordelt normalkraft, der kan være afhængig af x.

### Stangsystemer:

En stang der belastet i enderne, kan beregnes efter Hooks lov: $F = k \cdot u$,
hvor F er stangkraften, k er stivheden (elasticitetsmodulet · arealet) pr. længdeenhed, og u er den resulterende deformation.




Stangen vil få deformationen u1 i den ene ende og u2 i den anden ende.

$F1 = k \cdot (u1 - u2)$ $\qquad$ $F2 = k \cdot (-u1 + u2)$

Dette kan skrives på matrixform på denne måde: $\begin{pmatrix} F1 \\ F2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix}$

$k = \frac{E \cdot A}{L}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} F1 \\ F2 \end{pmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix}$

K kaldes for stivhedsmatricen $\quad K = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

u værdier: $u_1$ er deformationen i venstre ende.
$u_2$ er deformationen i højre ende.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

U værdier:
U(x) er den fordelte belastning.
Kendte U værdier fastsættes ud fra randbetingelser.

$$\int_0^L U(x)\cdot\phi_1\,dx = F_1$$ Som er normalkraften i venstre ende.

$$\int_0^L U(x)\cdot\phi_2\,dx = F_2$$ Som er normalkraften i højre ende.

$$U = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

FEM formulering:
(Bevises senere mere generelt)

$K\cdot u = U$ bliver til:

$$\frac{E\cdot A}{L}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Ovenstående forudsætter, at koordinatsystemets 1. akse er sammenfaldende med stangens længde akse. Stangen i det lokale koordinatsystem falder sammen med hovedsystemets koordinatsystem.

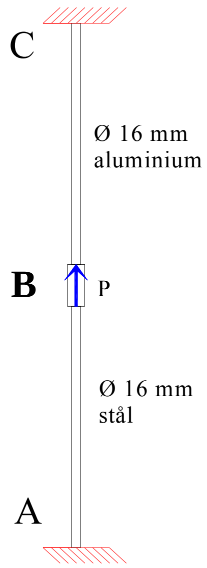
Denne forudsætning er kun sjældent opfyldt. Ofte indgår stangen i et gittersystem, hvor stængerne har hvert sit lokale koordinatsystem. For at kunne behandlen alle stængerne samtidigt i det samme system, er det derfor nødvendigt at omsætte stivhedsmatrisen fra de lokale koordinatsystemer til det globale koordinatsystem.

## 1.2 Opgaver.

### Opgave 1.2.1.

En stålstang med længde 500 mm og en aluminiumsstang også på 500 mm er samlet til een stang, der på midten er påvirket af en aksial kraft på P.

Find deformationen i knude **B** og reaktionerne i knude **A** og **C**.




Stål: $A_1 := 201 \cdot mm^2$ $E_1 := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

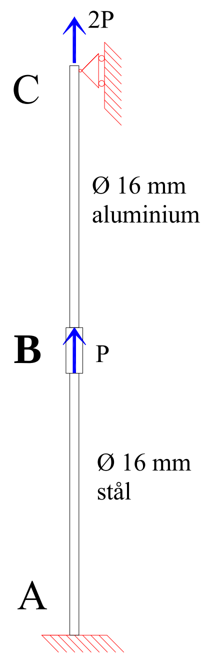
Aluminium: $A_2 := 201 \cdot mm^2$ $E_2 := 70000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

$P := 10000 \cdot N$ $L := 500 \cdot mm$

## Opgave 1.2.2.

En stålstang med længde 500 mm og en aluminiumsstang også på 500 mm er samlet til een stang, der er påvirket af en aksial kraft på P på midten og af en aksial kraft på 2·P i knude C.

Find deformationen i knude **B** og i knude **C** samt reaktionen i knude **A** .




Stål: $A_1 := 201 \cdot mm^2$ $E_1 := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

Aluminium: $A_2 := 201 \cdot mm^2$ $E_2 := 70000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

$P := 10000 \cdot N$ $L := 500 \cdot mm$

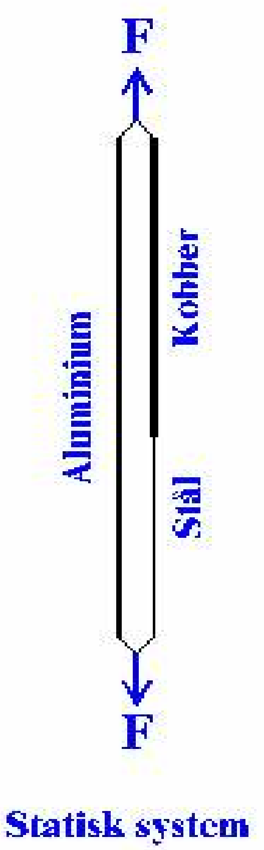
## Opgave 1.2.3.

Et system er opbygget som vist nedenfor af 3 stænger.

- Aluminium med diameter Da, længde La og E-modul 70 Gpa.
- Kobber med diameter Dk, længde Lk og E-modul 120 Gpa.
- Stål med diameter Ds, længde Ls og E-modul 210 Gpa

Opgaven skal løses med blyant og papir eller på MathCad som en FEM-beregning med opstillelse af stivhedsmatrix, randbetingelser, belastninger og "hist op og kom herned".

Diametre og længder kan vælges frit, dog vil det nok være en god idé af vælge
**La = Lk + Ls.**
Påvirkningen **F** kan også vælges frit.




Eksempel på værdier:

$E_a := 70000$ $\quad A_a := \frac{\pi}{4} \cdot 20^2$ $\quad L_a := 4000$

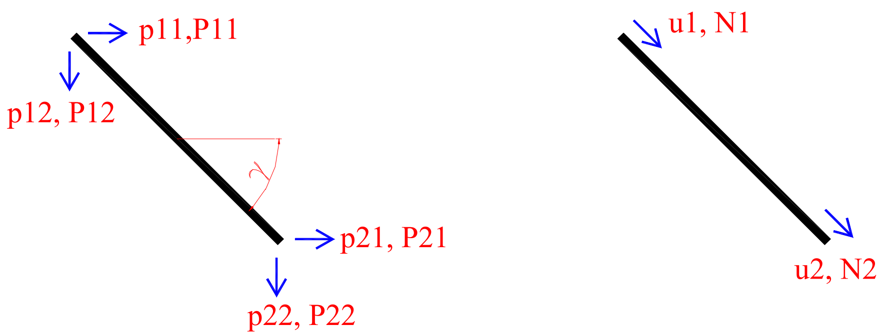
$E_c := 120000$ $\quad A_c := \frac{\pi}{4} \cdot 16^2$ $\quad L_c := 2500$

$E_s := 210000$ $\quad A_s := \frac{\pi}{4} \cdot 12^2$ $\quad L_s := 1500$

# 2.0 Gitterkonstruktioner.

## 2.1 Teori. Skrå stænger

Den generelle ligning $K \cdot u = U$, vil i dette tilfælde se således ud:
Globalt: $K \cdot p = P$ og lokalt: $K_e \cdot u = N$.




Lokale system:

$u_1 = p_{11} \cdot \cos(\gamma) + p_{12} \cdot \sin(\gamma)$ $\quad$ $u_2 = p_{21} \cdot \cos(\gamma) + p_{22} \cdot \sin(\gamma)$

Dette kan skrives på matrixform:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

kaldes T, så matrixligningen hedder: $u = T \cdot p$ for deformationer og $N = T \cdot P$ for kræfter.

Globale system:

$p_{11} = u_1 \cdot \cos(\gamma)$ $\quad$ $p_{12} = u_1 \cdot \sin(\gamma)$ $\quad$ $p_{21} = u_2 \cdot \cos(\gamma)$ $\quad$ $p_{22} = u_2 \cdot \sin(\gamma)$

Dette kan skrives på matrixform:

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

kaldes $T^T$, så matrixligningen hedder: $p = T^T \cdot u$ for deformationer og $P = T^T \cdot N$ for kræfter.

$K_e \cdot u = N$ Det lokale system

$T^T \cdot K_e \cdot u = T^T \cdot N$ Der højreganges med $T^T$ på begge sider.

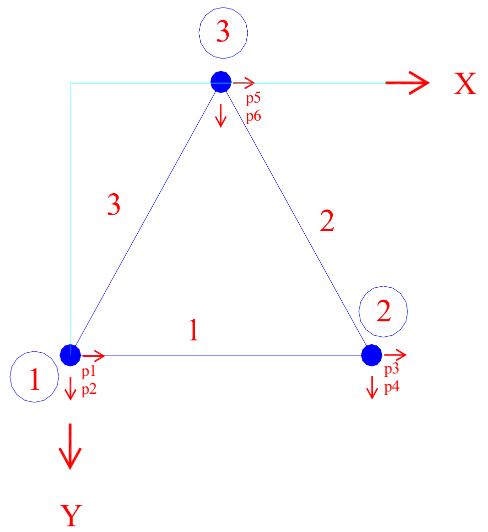
$T^T \cdot K_e \cdot u = P$ $T^T \cdot N$ sættes lig P

$T^T \cdot K_e \cdot T \cdot p = P$ u sættes lig med $T \cdot p$

Det ses således, at stivhedsmatricen i det globale system K
kan findes ud fra stivhedsmatricen i det lokale system $K_e$

som $K = T^T \cdot K_e \cdot T$

## 2.2 Eksempel 1 med gitterkonstruktion, herunder placering i den samlede stivhedsmatrice




Tallene 1, 2 og 3 angiver elementnumre.
Tallene 1, 2 og 3 i cirkler angiver knudenumre.
p1, p2.....p6 angiver deformationer i det globale koordinatsystem.

Stivhedsmatricerne for de enkelte elementer udregnes som vist:

$$\begin{pmatrix} \cos(v) & 0 \\ \sin(v) & 0 \\ 0 & \cos(v) \\ 0 & \sin(v) \end{pmatrix} \cdot E \cdot \frac{A}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(v) & \sin(v) \end{pmatrix}$$

$v := \frac{-\pi}{3}$ svarende til K3, med følgende værdier: $E := 70000$ $A := 314$ $L := 1000$

$$K3 := \begin{pmatrix} \cos(v)^2 \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \cos(v) \cdot E \cdot \frac{A}{L} \cdot \sin(v) & -\cos(v)^2 \cdot E \cdot \frac{A}{L} & -\cos(v) \cdot E \cdot \frac{A}{L} \cdot \sin(v) \\ \cos(v) \cdot E \cdot \frac{A}{L} \cdot \sin(v) & \sin(v)^2 \cdot E \cdot \frac{A}{L} & -\cos(v) \cdot E \cdot \frac{A}{L} \cdot \sin(v) & -\sin(v)^2 \cdot E \cdot \frac{A}{L} \\ -\cos(v)^2 \cdot E \cdot \frac{A}{L} & -\cos(v) \cdot E \cdot \frac{A}{L} \cdot \sin(v) & \cos(v)^2 \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \cos(v) \cdot E \cdot \frac{A}{L} \cdot \sin(v) \\ -\cos(v) \cdot E \cdot \frac{A}{L} \cdot \sin(v) & -\sin(v)^2 \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \cos(v) \cdot E \cdot \frac{A}{L} \cdot \sin(v) & \sin(v)^2 \cdot E \cdot \frac{A}{L} \end{pmatrix}$$

$$K3 = \begin{pmatrix} 5.5\times10^3 & -9.52\times10^3 & -5.5\times10^3 & 9.52\times10^3 \\ -9.52\times10^3 & 1.65\times10^4 & 9.52\times10^3 & -1.65\times10^4 \\ -5.5\times10^3 & 9.52\times10^3 & 5.5\times10^3 & -9.52\times10^3 \\ 9.52\times10^3 & -1.65\times10^4 & -9.52\times10^3 & 1.65\times10^4 \end{pmatrix}$$

Pladserne i den samlede stivhedsmatrice fra element 3 fastlægges ved at kigge på element 3 fra knude 1 til knude 3, der giver følgende bidrag til den samlede stivhedsmatrice:

$$K := \begin{pmatrix} K3_{1,1} & K3_{1,2} & 0 & 0 & K3_{1,5} & K3_{1,6} \\ K3_{2,1} & K3_{2,2} & 0 & 0 & K3_{2,5} & K3_{2,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K3_{3,1} & K3_{3,2} & 0 & 0 & K3_{3,5} & K3_{3,6} \\ K3_{4,1} & K3_{4,2} & 0 & 0 & K3_{4,5} & K3_{4,6} \end{pmatrix}$$

Placering i den samlede stivhedsmatrice for K3:

$$K3 = \begin{pmatrix} K11 & K12 & K15 & K16 \\ K21 & K22 & K25 & K26 \\ K51 & K52 & K55 & K56 \\ K61 & K62 & K65 & K66 \end{pmatrix}$$

Placering i den samlede stivhedsmatrice for K3:

$K = ∎$

$$K3 = \begin{pmatrix} K55 & K56 & K51 & K52 \\ K65 & K66 & K61 & K62 \\ K15 & K16 & K11 & K12 \\ K25 & K26 & K21 & K22 \end{pmatrix}$$

Pladserne i den samlede stivhedsmatrice fra element 3 fastlægges ved at kigge på element 3 fra knude 3 til knude 1, der giver følgende bidrag til den samlede stivhedsmatrice:

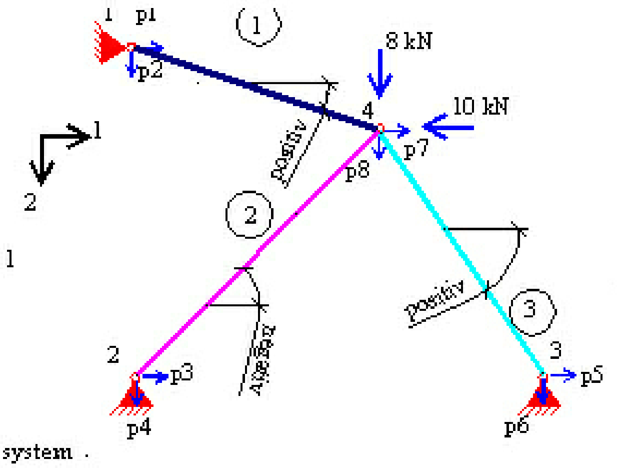
$$K := \begin{pmatrix} K3_{3,3} & K3_{3,4} & 0 & 0 & K3_{3,1} & K3_{3,2} \\ K3_{4,3} & K3_{4,4} & 0 & 0 & K3_{4,1} & K3_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K3_{1,3} & K3_{1,4} & 0 & 0 & K3_{1,1} & K3_{1,2} \\ K3_{2,3} & K3_{2,4} & 0 & 0 & K3_{2,1} & K3_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 5.5\times10^3 & -9.52\times10^3 & 0 & 0 & -5.5\times10^3 & 9.52\times10^3 \\ -9.52\times10^3 & 1.65\times10^4 & 0 & 0 & 9.52\times10^3 & -1.65\times10^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.5\times10^3 & 9.52\times10^3 & 0 & 0 & 5.5\times10^3 & -9.52\times10^3 \\ 9.52\times10^3 & -1.65\times10^4 & 0 & 0 & -9.52\times10^3 & 1.65\times10^4 \end{pmatrix}$$

Bidragene til den samlede stivhedsmatrice er som det ses helt ens. Det er derfor helt ligegyldigt, om man kigger på stangen fra knude 1 til knude 3 eller fra knude 3 til knude 1.

## 2.3 Eksempel 2 med gitterkonstruktion, herunder placering i den samlede stivhedsmatrice.

FEM Gitterkonstruktion, princip




$K_{E11}$ er stivhedsmatricen for element 1 i det lokale koordinatsystem.

$K_1$ er stivhedsmatricen for element 1 i det globale koordinatsystem.

K er stivhedsmatricen for det samlede system .

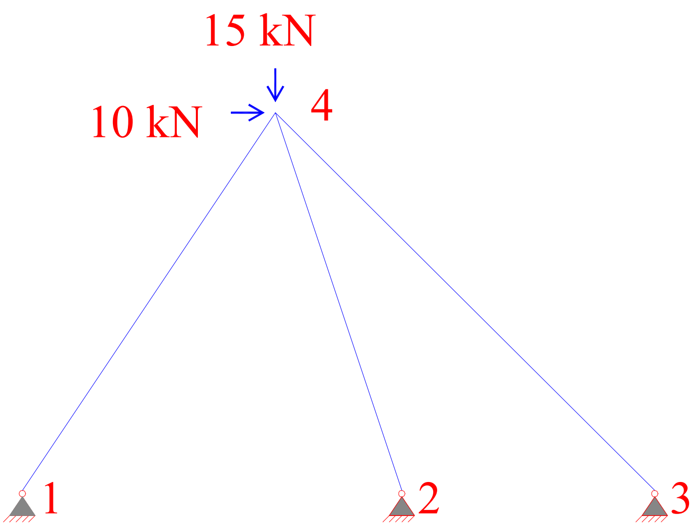
$$K_{E11} = \frac{E1\cdot A1}{L1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad K_1 = \begin{pmatrix}\cos(\gamma 1) & 0\\ \sin(\gamma 1) & 0\\ 0 & \cos(\gamma 1)\\ 0 & \sin(\gamma 1)\end{pmatrix}\cdot\frac{E1\cdot A1}{L1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\gamma 1) & \sin(\gamma 1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos(\gamma 1) & \sin(\gamma 1)\end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix}\cos(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1} & \cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1) & -\cos(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1} & -\cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1)\\ \cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1) & \sin(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1} & -\cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1) & -\sin(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\\ -\cos(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1} & -\cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1) & \cos(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1} & \cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1)\\ -\cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1) & -\sin(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1} & \cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1) & \sin(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A11}{L1}\end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix}\cos(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1) & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cos(\gamma 1)^2\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1} & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cos(\gamma 1)\cdot E1\cdot\frac{A1}{L1}\cdot\sin(\gamma 1) & \cdot\end{pmatrix}$$

## 2.4 Opgaver.

### Opgave 2.4.1. Gitterkonstruktion 1.




Ovenfor er der vist en gitterkonstruktion. Alle 3 stænger er cirkulære rør i stål S235 med udvendig
diameter på 120 mm og godstykkelse på 10 mm.

Vandret last i knude 4 er 10 kN og lodret last i knude 4 er 15 kN i det angivne koordinatsystem.

A) Opstil stivhedsmatrice for de enkelte elementer i lokale og globale koordinater.
Knude 1 har koordinater i meter: (0,0), knude 2: (3,0), knude 3: (5,0) og knude 4: (2,-3)

B) Opstil stivhedsmatrix for det samlede system.

C) Løs ligningssystemet og find deformationerne i knude 4.

D) Find stangkræfterne i alle 3 stænger.

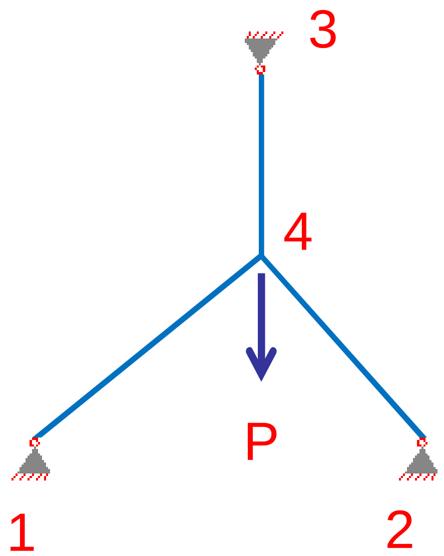
E) Kontrollér resultaterne med EDB. F. eks. Robot.

Tip:

Deformationer i det globale koordinatsystem kan benævnes således:

Vandret - henholdsvis lodret deformation i knude 1 kaldes p1 henholdsvis p2.
Vandret - henholdsvis lodret deformation i knude 2 kaldes p3 henholdsvis p4
Vandret - henholdsvis lodret deformation i knude 3 kaldes p5 henholdsvis p6
Vandret - henholdsvis lodret deformation i knude 4 kaldes p7 henholdsvis p8

## Opgave 2.4.2. Gitterkonstuktion 2.




### Gitterkonstruktion 2.

Punkt 1 har koordinaterne 0,0·a.
Punkt 2 har koordinaterne 5,0·a.
Punkt 3 har koordinaterne 3,6·a.
Punkt 4 har koordinaterne 3,3·a.

Alle stænger har tværsnittet A med E-modulet E.

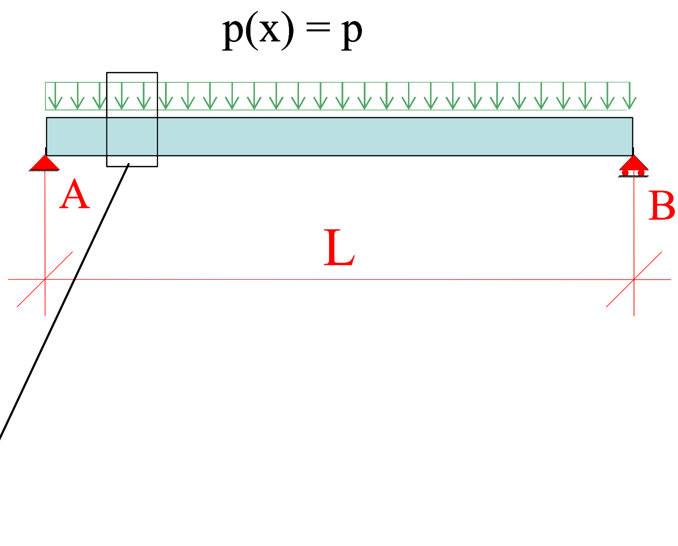
1)
Find et udtryk for stangkræfterne i alle 3 stænger.

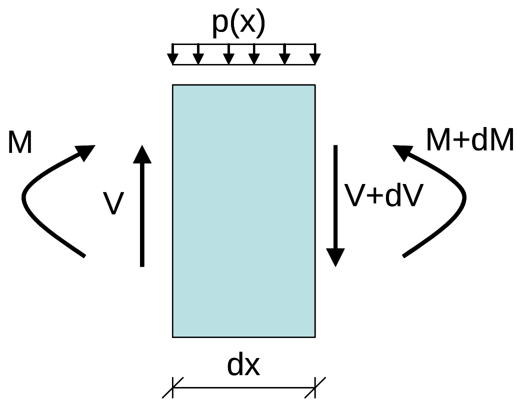
2)
Find et stålprofil i Teknisk Ståbi og vælg en værdi for a. Find resultaterne for stangkræfterne og kontrollér resultatet i et FEM software.

## 3.0 Bjælkens differentialligning.

Bjælkens differentialligning: $\frac{d^4}{dx^4}u = \frac{p(x)}{E \cdot I}$ Dette er en 4. ordens differentialligning, hvor den ubekendte er u.

### Der betragtes et udsnit af en udeformeret bjælke:




Lodret projektion giver:

$dV = -p(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dV}{dx} = -p(x)}$ **(A)**

Momentligning giver:

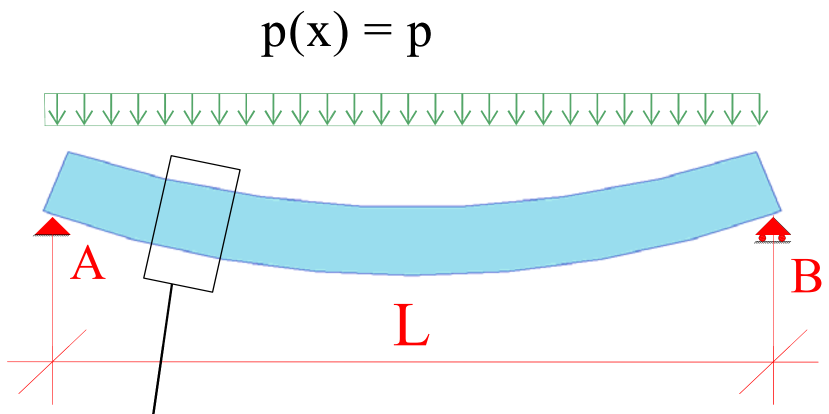
$$dM + \frac{1}{2} \cdot p(x) \cdot (dx)^2 - (V + dv) \cdot dx = 0$$

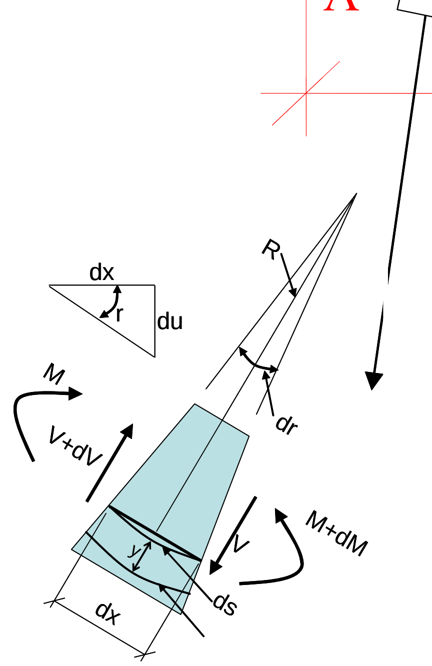
dx er en lille størrelse. $dx^2$ er derfor meget mindre og udelades derfor. Samme betragtning gælder $dV \cdot dx$, der således også udelades.
Tilbage er der

$dM - V \cdot dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dM}{dx} = V}$ **(B)**

Tilsammen giver dette: $\frac{d^2M}{dx^2} = -p(x)$

Der betragtes et udsnit af en deformeret bjælke:




Buelængden $ds = R \cdot dr$. ds sættes lig dx. $\varepsilon$ er tøjningen.

$$dr = \frac{dx}{R} = \frac{(1+\varepsilon) \cdot dx}{R+y} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = \frac{y}{R}$$

Hookes lov: $\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma = E \cdot \frac{y}{R}$

$$(1+\varepsilon) \cdot ds = (1+\varepsilon) \cdot dx$$

Længdesnit med deformeret tværsnit.

Tværsnittets normalkraft N findes ved at integrere normalspændingen op over hele arealet.
Da nullinien går gennem tyngdepunktet er N = 0.:

$$N = \int \sigma \, dA = \frac{E}{R} \cdot \int y \, dA = 0$$

Tilsvarende findes momentet:

$$M = \int \sigma \cdot y \, dA = \frac{E}{R} \cdot \int y^2 \, dA = \frac{E}{R} \cdot I \qquad \frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I}$$

Af figuren ses det, at vinklen $\quad dx = -R \cdot dr \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dx} = \frac{-1}{R}$

Det negative fortegn på grund af at vinklen bliver mindre med voksende x.

Endvidere ses det at: $\tan(r) = \frac{du}{dx}$ da r er meget lille er tan(r) = $\Rightarrow$ $r = \frac{du}{dx}$ $\Rightarrow$ $\frac{dr}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}u$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{-1}{R} = \frac{-M}{E \cdot I} \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{-M}{E \cdot I}} \qquad \textbf{(C)}$$

Fra ovenfor har vi $\frac{d^2M}{dx^2} = -p(x)$

Kombinationen af disse 2 differentialligninger giver bjælkens differentialligning:

$$\boxed{\frac{d^4u}{dx^4} = \frac{p(x)}{E \cdot I}}$$

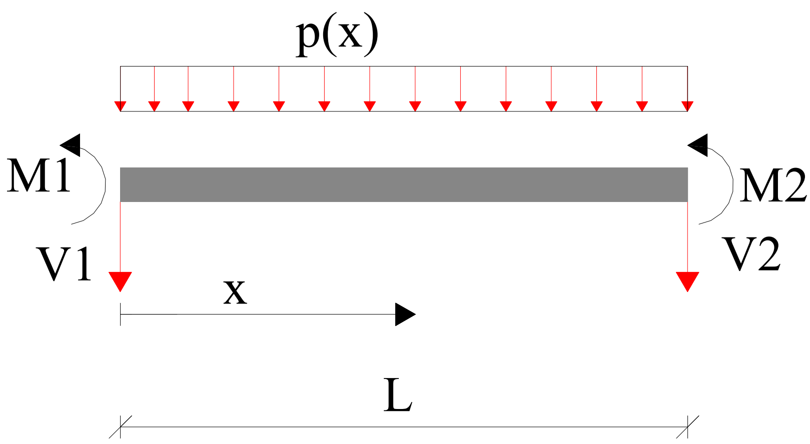
## 4.0 FEM formulering.

Bjælken differentialligning $\frac{d^4}{dx^4}u = \frac{p(x)}{E \cdot I}$ bliver til en matrixformulering $K \cdot u = U$

**Symboler:** E er elasticitetsmodulet. I er inertimomentet.
u(x) er lodret deformation og r(x) er vinkeldrejning.
U er en funktion af belastningen p(x).
Længden af bjælken er L.

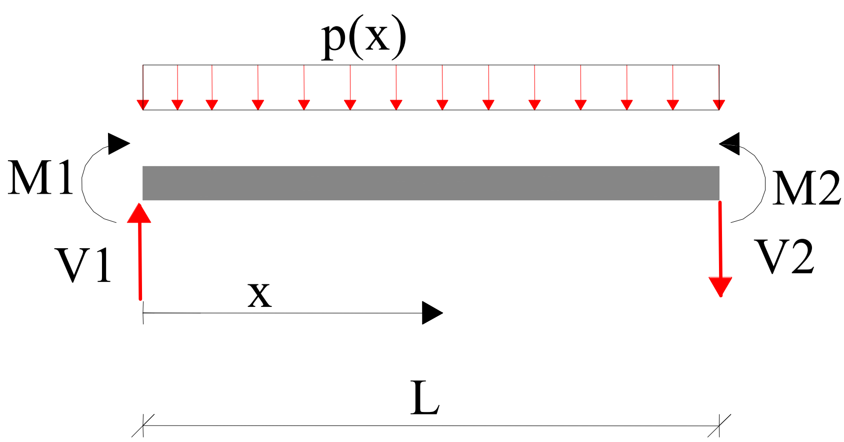
### 4.1 Fortegnsdefinition ved beregning af knudekræfter.

Den utraditionelle fortegnsdefinition for beregning af knudekræfter indføres, da det på denne måde er muligt direkte at sammenlægge flere bjælkeelementer.




**Fortegnsdefinition ved optegning af snitkraftkurver:**

**Traditionel fortegnsdefinition.**



## 4.2 Formfunktioner.

Formfunktioner er matematiske udtryk, der beskriver bjælkens deformation.
En vandret bjælke har 4 frihedsgrader og derfor 4 formfunktioner:

$\phi_1(x)$ En lodret deformation i venstre ende.
$\phi_2(x)$ En vinkeldrejning i venstre ende.
$\phi_3(x)$ En lodret deformation i højre ende.
$\phi_4(x)$ En vinkeldrejning i højre ende.

Der ses bort fra vandrette flytninger, da disse behandles under emnet stænger.

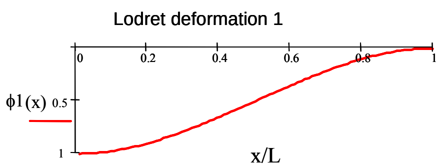
En formfunktion har den egenskab, at den kan antage værdien 1 eller 0.
Når eksempelvist formfunktion $\phi_2(x)$ har værdien 1, er værdien af de andre formfunktioner 0.
Dette betyder, at hvis formfunktion $\phi_2(x)$ har værdien 1, er vinkeldrejningen 1 i venstre side.
Den lodrette flytning i venstre side $\phi_1(x)$ er da lig 0.
Det samme gælder den lodrette flytning i højre side $\phi_3(x)$ og vinkeldrejningen i højre side $\phi_4(x)$.

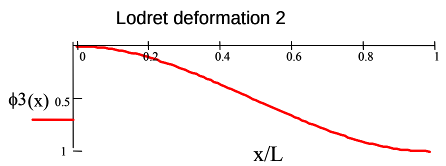
Formfunktionerne ser ud som vist nedenfor. Disse udledes under det punktet: Det virtuelle arbejdes princip.

$$\phi_1(x) = 2\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \qquad \phi_2(x) = -x\cdot\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{L} + 1\right]$$

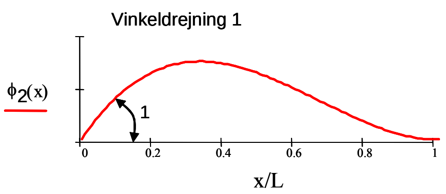
$$\phi_3(x) = -2\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 \qquad \phi_4(x) = -x\cdot\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right]$$

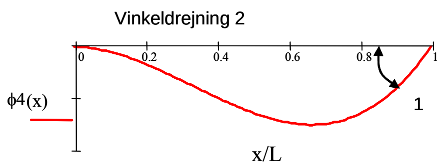
Grafisk ser formfunktionerne ud som vist her:




Deformationer tegnes positivt nedad.



## 5.0 Arbejdsligningen.

### 5.1 Udbøjningsfunktion.

Bjælkens deformationsfigur har vendetangenter. Derfor må funktionerne være 3. grads polynomier. Bjælkens udbøjning beskrives derfor således:

$$u(x) = a1 + a2\cdot x + a3\cdot x^2 + a4\cdot x^3 \qquad \textbf{(D)}$$

$$u(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & a4 \end{pmatrix}^T \qquad \textbf{(E)}$$

a1, a2, a3 og a4 er konstanter.
Vinkeldrejningen findes som den 1. afledede af udbøjningen.

$$\frac{d}{dx}u(x) = -r(x)$$

$$r(x) = (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\cdot x & 3\cdot x^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & a4 \end{pmatrix}^T$$

Ligningen skrives nu på matrixform med brug af randbetingelserne i begge ender af bjælken.

$$\begin{pmatrix} u1 \\ r1 \\ u2 \\ r2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & -1 & -2\cdot L & -3\cdot L^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{pmatrix}$$

Randbetingelser:

$u1 = u(0) = a1,\; r1 = r(0) = -a2$
$u2 = u(L) = a1 + a2\cdot L + a3\cdot L^2 + a4\cdot L^3$
$r2 = r(L) = -\left(a2 + a3\cdot 2\cdot L + a4\cdot 3\cdot L^2\right)$

$$u = M\cdot a \qquad \Rightarrow \qquad a = M^{-1}\cdot u$$

$$a = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & -1 & -2\cdot L & -3\cdot L^2 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} u1 \\ r1 \\ u2 \\ r2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad a = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u1 \\ -r1 \\ \frac{-3}{L^2}\cdot u1 + \frac{2}{L}\cdot r1 + \frac{3}{L^2}\cdot u2 + \frac{1}{L}\cdot r2 \\ \frac{2}{L^3}\cdot u1 - \frac{1}{L^2}\cdot r1 - \frac{2}{L^3}\cdot u2 - \frac{1}{L^2}\cdot r2 \end{pmatrix}$$

Disse værdier for a indsættes i (E)

$$u(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u1 \\ -r1 \\ \frac{-3}{L^2}\cdot u1 + \frac{2}{L}\cdot r1 + \frac{3}{L^2}\cdot u2 + \frac{1}{L}\cdot r2 \\ \frac{2}{L^3}\cdot u1 - \frac{1}{L^2}\cdot r1 - \frac{2}{L^3}\cdot u2 - \frac{1}{L^2}\cdot r2 \end{pmatrix}$$

Ganges der ud, får man udtrykket fra **(D)**

$$u(x) = u1 - r1 \cdot x + \left(\frac{2 \cdot r1}{L} + \frac{r2}{L} - \frac{3 \cdot u1}{L^2} + \frac{3 \cdot u2}{L^2}\right) \cdot x^2 + \left(\frac{2 \cdot u1}{L^3} - \frac{r2}{L^2} - \frac{r1}{L^2} - \frac{2 \cdot u2}{L^3}\right) \cdot x^3$$

$\Rightarrow$

$$u(x) = \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) \cdot u1 - \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \cdot r1 + \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) \cdot u2 + \left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right) \cdot r2$$

De funktioner, der ganges på u1, r1, u2 og r2 ses da at være de 4 formfunktioner.

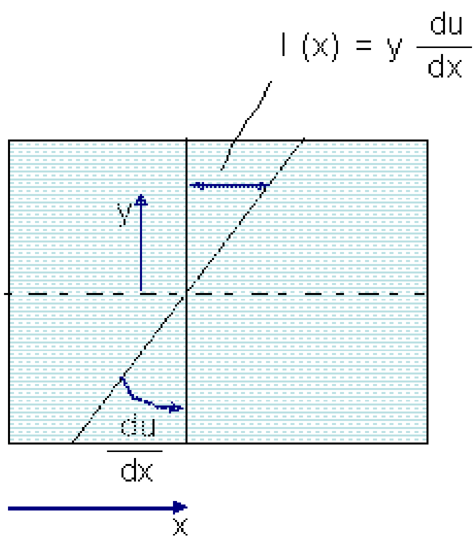
$$u(x) = \begin{pmatrix} \phi1(x) & \phi2(x) & \phi3(x) & \phi4(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u1 \\ r1 \\ u2 \\ r2 \end{pmatrix} \qquad u(x) = \phi(x) \cdot u \qquad \textbf{(F)}$$

B(x) defineres som $\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)$.

$$B(x) = \left(\frac{-6}{L^2} + 12 \cdot \frac{x}{L^3}\right) \cdot u1 - \left(\frac{-4}{L} + 6 \cdot \frac{x}{L^2}\right) \cdot r1 + \left(\frac{6}{L^2} - 12 \cdot \frac{x}{L^3}\right) \cdot u2 + \left(\frac{2}{L} - 6 \cdot \frac{x}{L^2}\right) \cdot r2$$

$$B = \begin{pmatrix} B1 & B2 & B3 & B4 \end{pmatrix}^T$$

## 5.2 Arbejdligningen




u er udbøjningen. $\frac{du}{dx}$ er da vinkeldrejningen.

Buelængden er $l(x) = y \cdot \frac{du(x)}{dx}$. sættes lig buelængden.

$l(x) = y \cdot \frac{du(x)}{dx}$ tøjningen $\varepsilon = \frac{dl(x)}{dx}$

$\varepsilon = y \cdot \frac{d^2}{dx^2}u(x) = y \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\phi(x) \cdot u)$ $\qquad \varepsilon = y \cdot B(x) \cdot u$

Husk at ε er en vektor med fire komponenter

Det indre arbejde:

$Ai = \int \varepsilon^T \cdot \sigma \, dv$ v er volumen $\sigma = E \cdot \varepsilon$ $Ai = \int \varepsilon^T \cdot E \cdot \varepsilon \, dv = \int y \cdot B^T \cdot u^T \cdot E \cdot y \cdot B \cdot u \, dv$

Det ydre arbejde fra den fordelte last.
$Ays = \int u(x) \cdot p(x) \, dx = \int \phi(x) \cdot u \cdot p(x) \, dx$ fra **(F)**

Ydre arbejde fra enkeltkræfter og momenter.
$Ayn = u^T \cdot P_e = u^T \cdot (P1 \;\; M1 \;\; P2 \;\; M2)$

$Ai = Ays + Ayn$ $\int y \cdot B^T \cdot u^T \cdot E \cdot y \cdot B \cdot u \, dv = \int \phi(x)^T \cdot u^T \cdot p(x) \, dx + u^T \cdot (P1 \;\; M1 \;\; P2 \;\; M2)$

$$\Rightarrow \quad u^T \cdot \int y^2 \cdot B^T \cdot E \cdot B \cdot u \, dv = u^T \cdot \int \phi(x)^T \cdot p(x) \, dx + u^T \cdot (P1 \;\; M1 \;\; P2 \;\; M2)$$

$$\Rightarrow \quad \int y^2 \, dA \cdot E \cdot \int (B)^T \cdot B \, dx \cdot u = \int (\phi(x))^T \cdot p(x) \, dx + u^T \cdot (P1 \;\; M1 \;\; P2 \;\; M2)$$

$$\Rightarrow \quad E \cdot I \cdot \int (B)^T \cdot B \, dx \cdot u = \int (\phi(x))^T \cdot p(x) \, dx + P_e \quad \Rightarrow \quad K \cdot u = U \quad \Rightarrow \quad K = E \cdot I \cdot \int (B)^T \cdot B \, dx \;\; \textbf{(G)}$$

K - matrice: $K_{ij} = E \cdot I \cdot \int_0^L (B1 \;\; B2 \;\; B3 \;\; B4)^T \cdot (B1 \;\; B2 \;\; B3 \;\; B4) \, dx$

$$K_{ij} = \int_0^L E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} B1 \cdot B1 & B1 \cdot B2 & B1 \cdot B3 & B1 \cdot B4 \\ B2 \cdot B1 & B2 \cdot B2 & B2 \cdot B3 & B2 \cdot B4 \\ B3 \cdot B1 & B3 \cdot B2 & B3 \cdot B3 & B3 \cdot B4 \\ B4 \cdot B1 & B4 \cdot B2 & B4 \cdot B3 & B4 \cdot B4 \end{pmatrix} dx$$

Eks. $K_{12}$ kan findes ved at indsætte formfunktionerne $\phi_1(x)$ og $\phi_2(x)$ :

$$\frac{K_{12}}{E \cdot I} = \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \phi_1(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \phi_2(x) \, dx = \frac{-6}{L^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{K_{12}}{E \cdot I} = \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left[ 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \right] \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left[ -x \cdot \left[ \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{L} + 1 \right] \right] dx = \frac{-6}{L^2}$$

Hele stivhedsmatricen K for en vandret bjælke for forskydningskræfter og momenter ser således **altid** sådan ud.

K - matrice:

$$K = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix}$$

u værdier:

Kendte u værdier fastsættes ud fra randbetingelser.

$u_1$ er lodret deformation i venstre ende.
$r_1$er vinkeldrejningen i venstre ende.
$u_2$ er lodret deformation i højre ende.
$r_2$er vinkeldrejningen i højre ende.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ r_1 \\ u_2 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

## 5.3 Enkeltkræfter og momenter.

U værdier: U(x) er den fordelte belastning. Kendte U værdier fastsættes ud fra randbetingelser.

$$\int_0^L U(x)\cdot\phi_1\,dx = V_1$$

Som er den lodrette kraft eller reaktion i venstre ende.

$$\int_0^L U(x)\cdot\phi_2\,dx = M_1$$

Som er momentet i venstre ende.

$$\int_0^L U(x)\cdot\phi_3\,dx = V_2$$

Som er den lodrette kraft eller reaktion i højre ende.

$$U = \begin{pmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^L U(x)\cdot\phi_4\,dx = M_2$$

Som er momentet i højre ende.

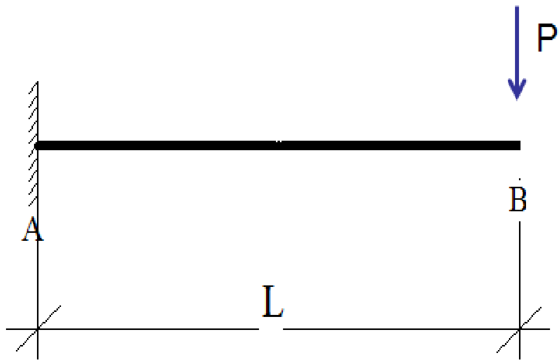
## 6.0 Eksempel. Udkraget bjælke IPE-240 med enkeltkraft.

### 6.1 Eksempel

$P_b := 10 \cdot kN \qquad L := 5 \cdot m \qquad I := 38.9 \cdot 10^6 \cdot mm^4 \qquad E := 2.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{N}{mm^2}$

$M_a := -P_b \cdot L \qquad V_a := -P_b \qquad u_b := \frac{P_b \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \qquad r_b := \frac{-P_b \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$

$M_a = -50 \cdot kN \cdot m \qquad R_a := 10^4 \cdot kN \qquad u_b = 51.01 \cdot mm \qquad r_b = -0.02$




$$K = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L} & -6 & -\frac{12}{L} & -6 \\ -6 & 4 \cdot L & 6 & 2 \cdot L \\ -\frac{12}{L} & 6 & \frac{12}{L} & 6 \\ -6 & 2 \cdot L & 6 & 4 \cdot L \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_b \\ r_b \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} R_a \\ M_a \\ P_b \\ 0 \end{pmatrix}$$

De 2 første rækker i u er 0. Derfor kan man også fjerne de 2 første søjler og rækker i K-matricen.
Man får således et modificeret sytem:

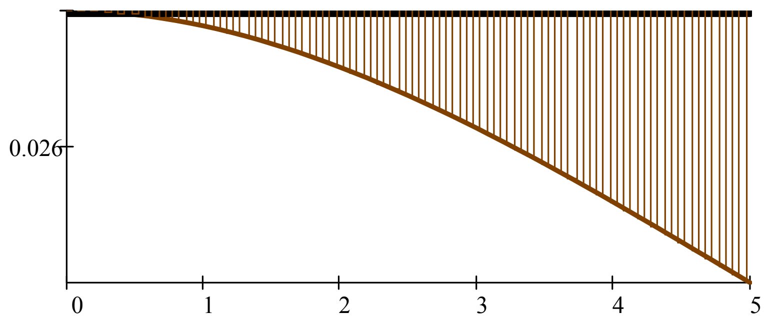
$$K_{mod} = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L} & 6 \\ 6 & 4 \cdot L \end{pmatrix} \qquad u_{mod} = \begin{pmatrix} u_b \\ r_b \end{pmatrix} \qquad U_{mod} = \begin{pmatrix} P_b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_{mod} = K_{mod}^{-1} \cdot U_{mod}$$

$$\begin{pmatrix} u_b \\ r_b \end{pmatrix} = \left[ \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L} & 6 \\ 6 & 4 \cdot L \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P_b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot P_b \\ \frac{-1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot L^2 \cdot P_b \end{pmatrix}$$

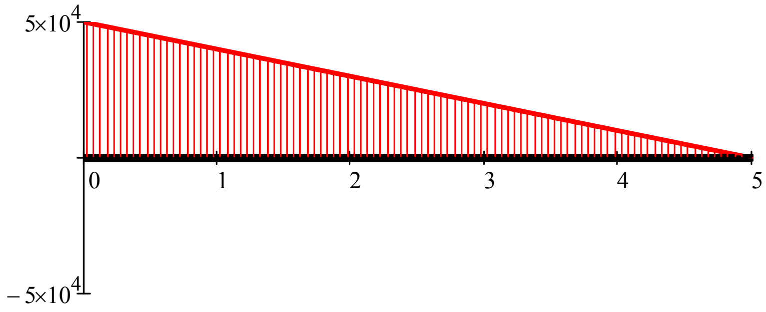
$$u(x) := \left[ \left( 1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) \cdot 0 - \left( x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \cdot 0 + \left( \frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot P_b \right) + \left( \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \right) \cdot \left( \frac{-1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot L^2 \cdot P_b \right) \right]$$

## 6.2 Snitkraftkurver.

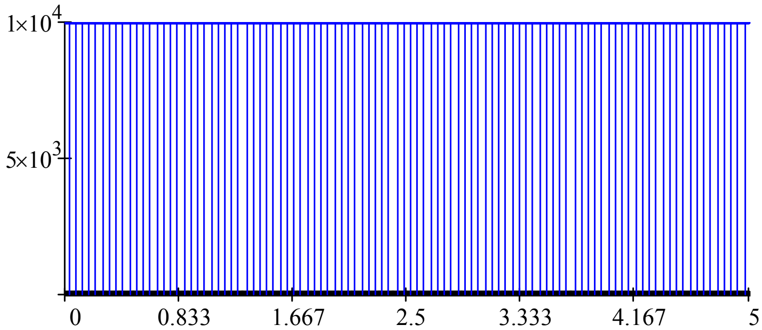
$u(x) := \frac{-1}{6} \cdot x^2 \cdot P_b \cdot \frac{-3 \cdot L + x}{E \cdot I}$ $M(x) := -P_b \cdot (-L + x)$ $V(x) := P_b$




Udbøjningskurve




Momentkurve

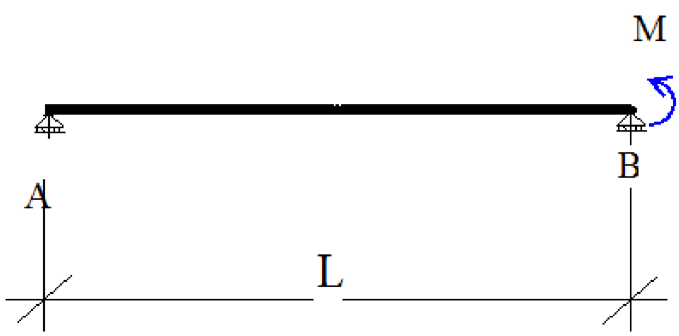



Forskydningskraftkurve

## Opgave 6.2.1.

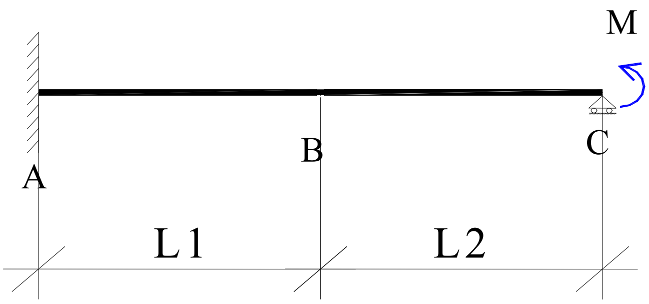
Find reaktioner og optegn snitkraftkurver for den viste bjælke. Kontrollér resultatet med FEM software eller Teknisk Ståbi.

Find udbøjningen og vinkeldrejningen på midten ud fra formfunktionerne.



## 7.0 Eksempel med Bjælke over 2 fag med en momentpåvirkning.

### 7.1 Symbolsk løsning.




$L1 = L2 = L$

$E1 = E2 = E$

$I1 = I2 = I$

Bjælken opdeles i 2 elementer med hver sin K-matrice. Disse 2 K-matricer expanderes for direkte at kunne lægge dem sammen.

$$K1 = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L} & -6 & -\frac{12}{L} & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 \cdot L & 6 & 2 \cdot L & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L} & 6 & \frac{12}{L} & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 \cdot L & 6 & 4 \cdot L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K2 = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{L} & -6 & \frac{-12}{L} & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \cdot L & 6 & 2 \cdot L \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L} & 6 & \frac{12}{L} & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \cdot L & 6 & 4 \cdot L \end{pmatrix}$$

$K \cdot u = U$

Der dannes nu et modificeret sytem, hvor alle 0'er i deformationsmatricen u fjernes. Dermed fjernes de tilsvarende søjler og rækker i stivhedsmatricen, der bliver til den modificerede stivhedsmatrice $K_{mod}$.

$K = K1 + K2$ $\qquad u^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_b & r_b & 0 & r_c \end{pmatrix}$ $\qquad U^T = \begin{pmatrix} A_l & M_a & 0 & 0 & C_l & M \end{pmatrix}$

Udbøjning i A og C er 0 ligesom vinkeldrejning i A

$$K_{mod} = \begin{pmatrix} K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,6} \\ K_{4,3} & K_{4,4} & K_{4,6} \\ K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,6} \end{pmatrix} \qquad u_{mod} = \begin{pmatrix} u_b & r_b & r_c \end{pmatrix} \qquad U_{mod} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M \end{pmatrix}$$

$K_{mod} \cdot u_{mod} = U_{mod}$ $\qquad u_{mod} = K_{mod}^{-1} \cdot U_{mod}$

$$K_{mod} = \begin{pmatrix} \frac{24}{L^3}\cdot E\cdot I & 0 & -6\cdot E\cdot \frac{I}{L^2} \\ 0 & \frac{8}{L}\cdot E\cdot I & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I \\ -6\cdot E\cdot \frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & \frac{4}{L}\cdot E\cdot I \end{pmatrix} \qquad u_{mod} = \begin{pmatrix} \frac{24}{L^3}\cdot E\cdot I & 0 & -6\cdot E\cdot \frac{I}{L^2} \\ 0 & \frac{8}{L}\cdot E\cdot I & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I \\ -6\cdot E\cdot \frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & \frac{4}{L}\cdot E\cdot I \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\cdot E\cdot I}\cdot L^2\cdot M \\ \frac{-1}{8}\cdot\frac{L}{E\cdot I}\cdot M \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{E\cdot I}\cdot M \end{pmatrix}$$

$$U = K\cdot u \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3}\cdot E\cdot I & -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{-12}{L^3}\cdot E\cdot I & -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & 0 & 0 \\ -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{4}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & 0 & 0 \\ \frac{-12}{L^3}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{24}{L^3}\cdot E\cdot I & 0 & \frac{-12}{L^3}\cdot E\cdot I & -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} \\ -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & 0 & \frac{8}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L^3}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{12}{L^3}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} \\ 0 & 0 & -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{4}{L}\cdot E\cdot I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8\cdot E\cdot I}\cdot L^2\cdot M \\ \frac{-1}{8}\cdot\frac{L}{E\cdot I}\cdot M \\ 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{E\cdot I}\cdot M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4\cdot L}\cdot M \\ \frac{1}{2}\cdot M \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4\cdot L}\cdot M \\ M \end{pmatrix}$$

## 7.2 Taleksempel.

$L := 3\cdot m \qquad I := 16.7\cdot 10^6\cdot mm^4 \qquad E := 2.1\cdot 10^5\cdot\frac{N}{mm^2} \qquad M_C := 10\cdot kN\cdot m$

$A_l := \frac{-3}{4\cdot L}\cdot M_C \rightarrow -\frac{5\cdot kN}{2} \qquad M_A := \frac{1}{2}\cdot M_C \rightarrow 5\cdot kN\cdot m$

Positiv p.g.a. fortegnsdefinition

$C_l := \frac{3}{4\cdot L}\cdot M_C \rightarrow \frac{5\cdot kN}{2}$

$u_b := \frac{1}{8\cdot E\cdot I}\cdot L^2\cdot M_C \qquad u_b = 3.21\cdot mm \qquad r_b := \frac{-1}{8}\cdot\frac{L}{E\cdot I}\cdot M_C \qquad r_b = -1.07\times 10^{-3}$

$r_c := \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{E\cdot I}\cdot M_C \qquad r_c = 4.28\times 10^{-3}$

For at få snitkræfter på midten betragtes element 1 alene: $K1 \cdot u1 = U1$

$$K1 = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \qquad u1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_b \\ r_b \end{pmatrix} \qquad U1 = \begin{pmatrix} V_A \\ M_a \\ V_B \\ M_B \end{pmatrix}$$

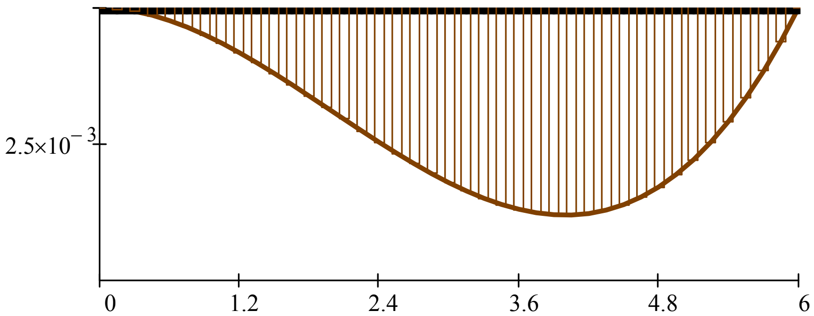
$$U1 = K1 \cdot u1 \qquad U1 = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_b \\ r_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{L^3} \cdot E \cdot I \cdot u_b - \frac{6}{L^2} \cdot E \cdot I \cdot r_b \\ \frac{6}{L^2} \cdot E \cdot I \cdot u_b + \frac{2}{L} \cdot E \cdot I \cdot r_b \\ \frac{12}{L^3} \cdot E \cdot I \cdot u_b + \frac{6}{L^2} \cdot E \cdot I \cdot r_b \\ \frac{6}{L^2} \cdot E \cdot I \cdot u_b + \frac{4}{L} \cdot E \cdot I \cdot r_b \end{pmatrix}$$

## 7.3 Snitkraftkurver.

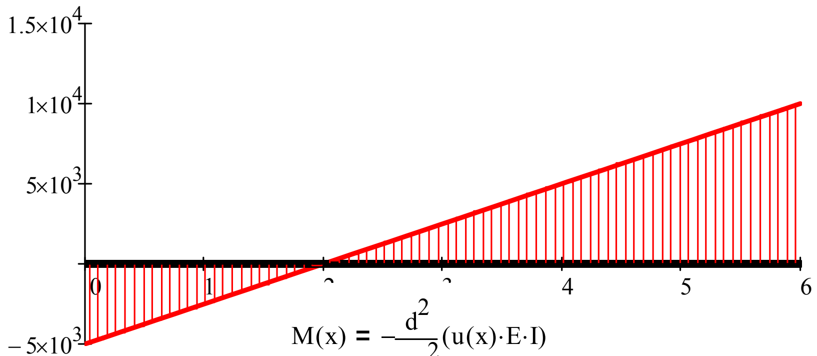
$u(x) = \phi(x) \cdot u$ **(D)**

$$u(x) = \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) \cdot 0 - \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) \cdot \left(\frac{1}{8 \cdot E \cdot I} \cdot L^2 \cdot M_C\right) + \left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{8} \cdot \frac{L}{E \cdot I} \cdot M_C\right)$$

$$u(x) = \frac{-1}{8} \cdot \frac{x^2}{L} \cdot M_C \cdot \frac{-2 \cdot L + x}{E \cdot I} \qquad M(x) := \frac{1}{4} \cdot M_C \cdot \frac{-2 \cdot L + 3 \cdot x}{L} \qquad V(x) := \frac{3}{4 \cdot L} \cdot M_C$$

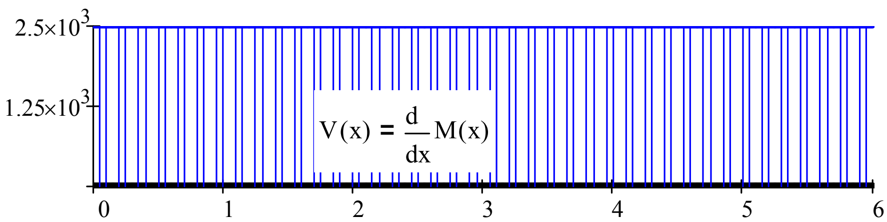



Udbøjningskurve




$$M(x) = -\frac{d^2}{dx^2}(u(x) \cdot E \cdot I)$$

Momentkurve

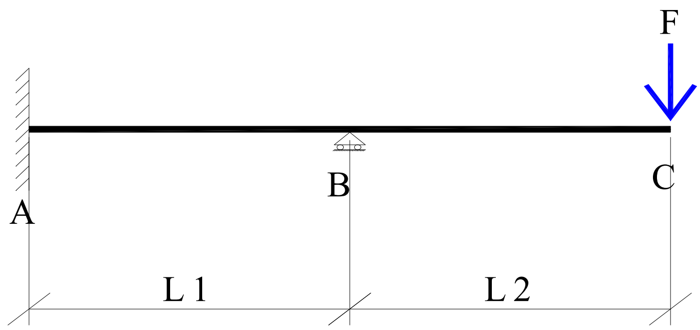



$$V(x) = \frac{d}{dx} M(x)$$

Forskydningskraftkurve

## 7.4 Opgaver.

### Opgave 7.4.1. Bjælke over 2 fag.




Bjælken er HE 160A . Længden L1 er 5 m og længden L2 er 4 m.

F er 10 kN..

A) Opstil ligningssystemet for bjælken

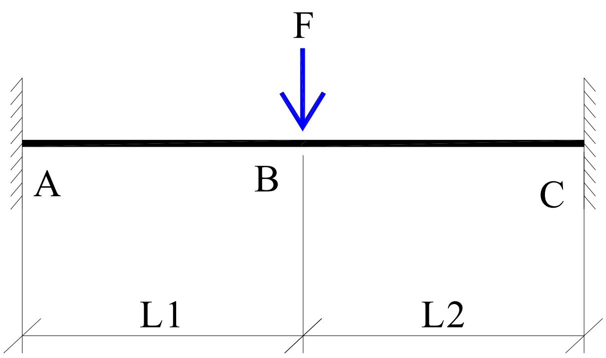
B) Find reaktionerne i A og i B.

C) Find vinkeldrejning i B, og find udbøjning og vinkeldrejning i C.

D) Find momentet i B.

E) Optegn kurver for deformationer og snitkræfter.

### Opgave 7.4.2. Bjælke over 2 fag. Tvangsdeformation.




Bjælken er HE 160A . Længden L1 er 5 m og længden L2 er 4 m.

Pkt. B skal have en deformation på 20 mm.

A) Find den nødvendige kraft F.

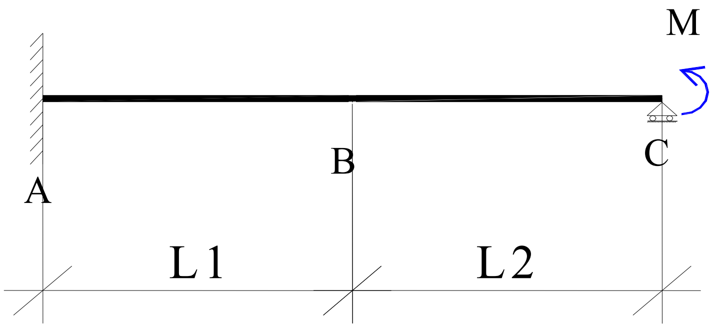
B) Find reaktionerne i A og i C samt vinkeldrejning i B.

C) Find momentet i B.

D) Optegn kurver for deformationer og snitkræfter.

# 8.0 Eksempel med Bjælke over 2 fag med en momentpåvirkning. Plastisk beregning.

## 8.1 Symbolsk løsning.




$L1 = L2 = L$

$E1 = E2 = E$

$I1 = I2 = I$

Fremgangsmåden følger eksemplet ovenfor.

$$K1 = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L} & -6 & -\frac{12}{L} & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 \cdot L & 6 & 2 \cdot L & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L} & 6 & \frac{12}{L} & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 \cdot L & 6 & 4 \cdot L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K2 = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{L} & -6 & \frac{-12}{L} & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \cdot L & 6 & 2 \cdot L \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L} & 6 & \frac{12}{L} & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \cdot L & 6 & 4 \cdot L \end{pmatrix}$$

$K_u = U$

Der dannes nu et modificeret sytem, hvor all1 0'er i deformationsmatricen u fjernes. Dermed fjernes de tilsvarende søjler og rækker i stivhedsmatricen, der bliver til den modificerede stivhedsmatrice $K_{mod}$.

$$K = K1 + K2 \qquad u^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_b & r_b & 0 & r_c \end{pmatrix} \qquad U^T = \begin{pmatrix} A_l & M_a & 0 & 0 & C_l & M \end{pmatrix}$$

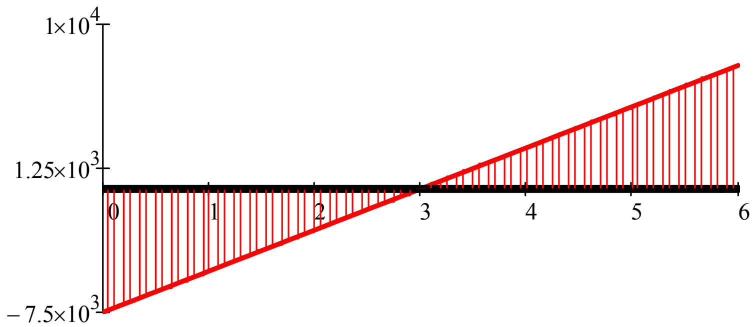
$$K_{mod} = \begin{pmatrix} K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,6} \\ K_{4,3} & K_{4,4} & K_{4,6} \\ K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,6} \end{pmatrix} \qquad u_{mod} = \begin{pmatrix} u_b & r_b & r_c \end{pmatrix} \qquad U_{mod} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_C \end{pmatrix}$$

$$K_{mod} \cdot u_{mod} = U_{mod} \qquad u_{mod} = K_{mod}^{-1} \cdot U_{mod}$$

$$U = K \cdot u \qquad \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3}\cdot E\cdot I & -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{-12}{L^3}\cdot E\cdot I & -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & 0 & 0 \\ -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{4}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & 0 & 0 \\ \frac{-12}{L^3}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{24}{L^3}\cdot E\cdot I & 0 & \frac{-12}{L^3}\cdot E\cdot I & -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} \\ -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & 0 & \frac{8}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L^3}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{12}{L^3}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} \\ 0 & 0 & -6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{4}{L}\cdot E\cdot I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_B \\ r_B \\ 0 \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ M_A \\ 0 \\ 0 \\ C_1 \\ M_C \end{pmatrix}$$

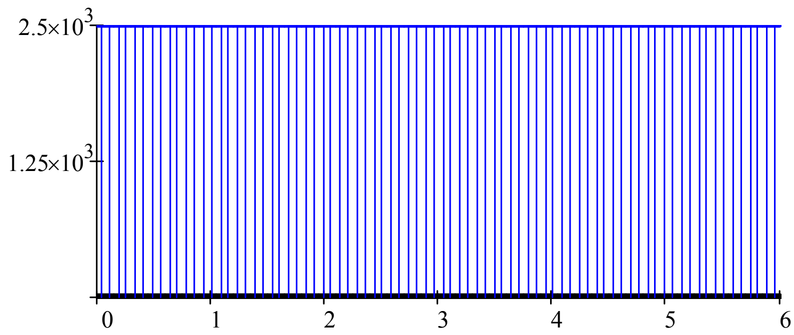
## 8.2 Snitkraftkurver.

Dette ligningssytem løses med iteration, indtil $M_A = M_C$




Momentkurve

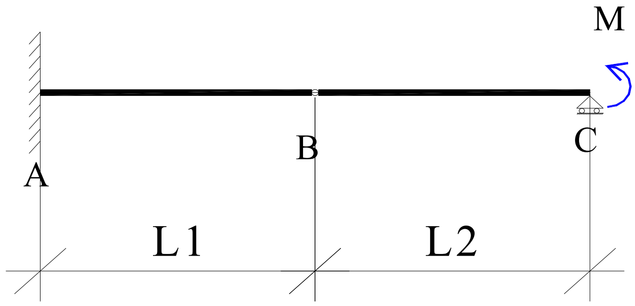
Dette er en nedreværdiløsning.




Forskydningskraftkurve

## 9.0 Eksempel. Bjælke over 2 fag med charnier.

### 9.1 Symbolsk løsning.




$L1 = L2 = L$

$E1 = E2 = E$

$I1 = I2 = I$

Proceduren er igen den samme. På grund af charnier i pkt. B kommer der en frihedsgrad mere, da der nu er 2 vinkeldrejninger i pkt. B

$$K1 = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L} & -6 & -\frac{12}{L} & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 \cdot L & 6 & 2 \cdot L & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L} & 6 & \frac{12}{L} & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 \cdot L & 6 & 4 \cdot L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K2 = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{L} & 0 & -6 & -\frac{12}{L} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 4 \cdot L & 6 & 2 \cdot L \\ 0 & 0 & -\frac{12}{L} & 0 & 6 & \frac{12}{L} & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 2 \cdot L & 6 & 4 \cdot L \end{pmatrix}$$

$K = K1 + K2$

$u^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_B & r_{B1} & r_{B2} & 0 & r_C \end{pmatrix}$

$U^T = \begin{pmatrix} A_1 & M_A & 0 & 0 & 0 & C_1 & M \end{pmatrix}$

$$K_{mod} = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{24}{L} & 6 & -6 & -6 \\ 6 & 4L & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \cdot L & 2 \cdot L \\ -6 & 0 & 2 \cdot L & 4 \cdot L \end{pmatrix}$$

$u_{mod} = \begin{pmatrix} u_B & r_{B1} & r_{B2} & r_C \end{pmatrix}$

$U_{mod} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}$

$$\left[ \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{24}{L} & 6 & -6 & -6 \\ 6 & 4L & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \cdot L & 2 \cdot L \\ -6 & 0 & 2 \cdot L & 4 \cdot L \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot M_C \\ \frac{-L}{2 \cdot E \cdot I} \cdot M_C \\ \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \cdot M_C \\ \frac{2 \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} \cdot M_C \end{pmatrix}$$

$$K \cdot u = \begin{pmatrix} \frac{-1}{L} \cdot M_C \\ M_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \cdot M_C \\ M_C \end{pmatrix}$$

## 9.2 Taleksempel.

$L := 3 \cdot m \qquad I := 16.7 \cdot 10^6 \cdot mm^4 \qquad E := 2.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{N}{mm^2} \qquad M_C := 10 \cdot kN \cdot m$

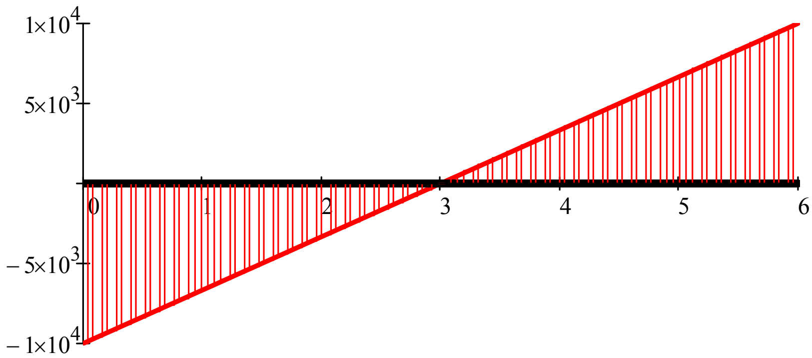
$u_B := \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot M_C \qquad u_B = 8.55 \cdot mm \qquad r1_B := \frac{-L}{2 \cdot E \cdot I} \cdot M_C \qquad r1_B = -4.28 \times 10^{-3}$

$r2_B := \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \cdot M_C \qquad r2_B = 1.43 \times 10^{-3} \qquad r_C := \frac{2 \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} \cdot M_C \qquad r_C = 5.7 \times 10^{-3}$

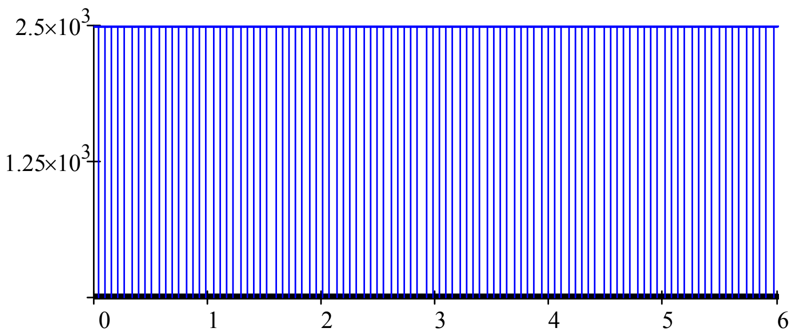
$M_A := M_C \qquad A_l := \frac{-1}{L} \cdot M_C \qquad A_l = -3.33 \times 10^3 N \qquad x := 0, 0.12 .. 6$

## 9.3 Snitkraftkurver.

$M(x) := -M_C + M_A \cdot \frac{x}{3}$



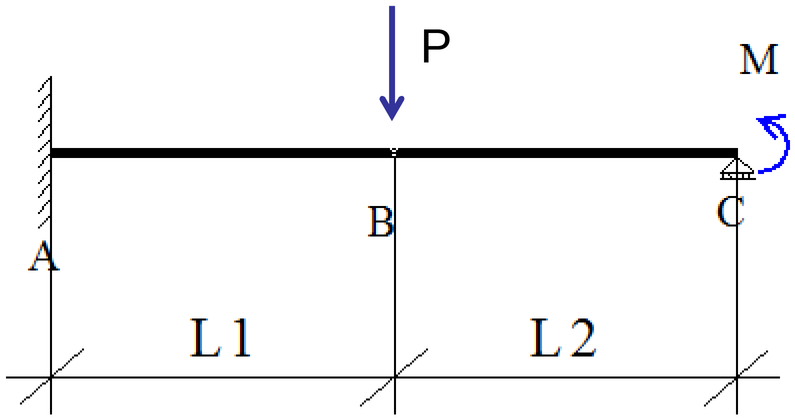

Momentkurve




Forskydningskraftkurve

## 9.4 Opgaver

### Opgave 9.4.1.



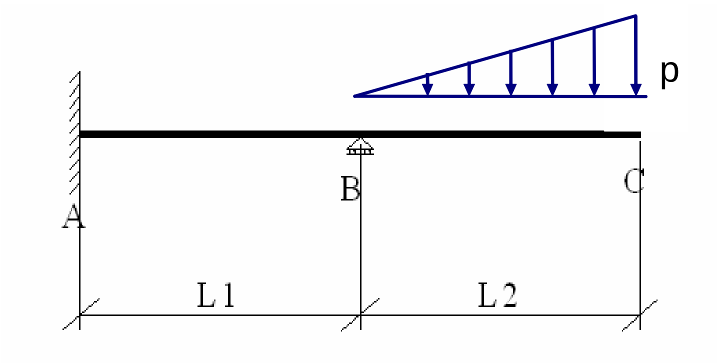

Der er charnier i punkt B.

A) Find reaktioner.
B) Optegn snitkraftkurver for forskydning og moment.
C) Kontrollér resultatet med et FEM software.
D) Opgave 7.4.2 med charnier i knude B.

# 10. Fordelt last.

## 10.1 Symbolsk beregning.

Bjælken analyseres nu for en trekantformet fordelt belastning.
Bjælken inddeles i 2 elementer: Element 1 fra A-B og element 2 fra B-C.
Der ses bort fra normalkræfter.




$$p := 10 \cdot \frac{kN}{m}$$

$$L1 = L2 = L$$

$$E1 = E2 = E$$

$$I1 = I2 = I$$

Den generelle stivhedsmatrice for en vandret bjælke er som angivet K.
Med de nævnte forudsætninger, vil stivhedsmatricerne for element 1 og element 2 være ens.

$$K = E\cdot I\cdot\begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix}$$

Deformationsmatricen u ser ud som følger. Randbetingelserne er deformation og vinkeldrejning i pkt. A er 0 ligesom deformationen i pkt B.

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ r_A \\ u_B \\ r_B \\ u_C \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_B \\ u_C \\ r_C \end{pmatrix}$$

For direkte at kunne lægge K-matricerne for de 2 elementer sammen, ekspanderes de begge.

$$K1 = \frac{E\cdot I}{L^2}\cdot\begin{pmatrix} \frac{12}{L} & -6 & -\frac{12}{L} & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4\cdot L & 6 & 2\cdot L & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L} & 6 & \frac{12}{L} & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 2\cdot L & 6 & 4\cdot L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K2 = \frac{E\cdot I}{L^2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{L} & -6 & \frac{-12}{L} & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 4\cdot L & 6 & 2\cdot L \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L} & 6 & \frac{12}{L} & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2\cdot L & 6 & 4\cdot L \end{pmatrix}$$

Det samlede system vil have 6 frihedsgrader, nemlig lodret deformation og vinkeldrejning i alle 3 punkter A, B og C. Den samlede stivhedsmatrix vil derfor være en 6*6 matrix $K = K1 + K2$

En trekantformet fordelt last kan opskrives med funktionen: $p(x) = p\cdot\frac{x}{L}$

Trekantlasten skal transformeres til nogle ækvivalente virtuelle knudelaste på element 2 ud fra udtrykket:

$U_i = \int \phi_i\cdot p(x)\,dx$. For den første ækvivalente knudelast, som er den lodrette påvirkning i punkt B, giver dette: $U_1 = \int_0^L \left(1 - \frac{3\cdot x^2}{L^2} + \frac{2\cdot x^3}{L^3}\right)\cdot p\cdot\frac{x}{L}\,dx = \frac{3}{20}\cdot L\cdot P$

På samme måde  fastsættes den  næste ækvivalente knudelast, som er momentpåvirkningen i pkt. B:

$$U_2 = \int_0^L -\left(x - \frac{2\cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\cdot p\cdot\frac{x}{L}\,dx = \frac{-1}{30}\cdot L^2\cdot p$$

På samme måde fastsættes de ækvivalente knudelaste i pkt. C.

$$U_3 = \int_0^L \left(\frac{3\cdot x^2}{L^2} - \frac{2\cdot x^3}{L^3}\right)\cdot p\cdot\frac{x}{L}\,dx = \frac{7}{20}\cdot L\cdot p$$

$$U_4 = \int_0^L \left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right)\cdot p\cdot\frac{x}{L}\,dx = \frac{1}{20}\cdot L^2\cdot p$$

vektoren for det samlede system vil da komme til at se sådan ud:

$$U = \begin{pmatrix} V_A \\ M_A \\ V_B \\ M_B \\ V_C \\ M_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_A \\ M_A \\ \frac{3}{20}\cdot L\cdot p + R_B \\ \frac{-1}{30}\cdot L^2\cdot p \\ \frac{7}{20}\cdot L\cdot p \\ \frac{1}{20}\cdot L^2\cdot p \end{pmatrix}$$ Deformationsvektoren $$u = \begin{pmatrix} u_A \\ r_A \\ u_B \\ r_B \\ u_C \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_B \\ u_C \\ r_C \end{pmatrix}$$ og søjle.

Vi kan derfor opstille et modificeret system, hvor vi udnytter, at de 3 første rækker i u er 0.
Derfor kan vi kigge på et modificeret system, hvor række 1, 2 og 3 i stivhedsmatricen kan slettes.

Den modificerede stivhedsmatrix findes som $K_{mod} = \begin{pmatrix} K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} \\ K_{5,4} & K_{5,5} & K_{5,6} \\ K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} \end{pmatrix}$. I dette tilfælde giver

dette: $$K_{mod} = \begin{pmatrix} \frac{8}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I \\ 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{12}{L^3}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} \\ \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{4}{L}\cdot E\cdot I \end{pmatrix}.$$ $$U_{mod} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{30}\cdot L^2\cdot p \\ \frac{7}{20}\cdot L\cdot p \\ \frac{1}{20}\cdot L^2\cdot p \end{pmatrix}$$

For at finde de 3 ubekendt i u, løses følgende ligning: $\begin{pmatrix} r_B \\ u_C \\ r_C \end{pmatrix} = K_{mod}^{-1}\cdot U_{mod}$

Hvilket giver: $$\begin{pmatrix} \frac{8}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{2}{L}\cdot E\cdot I \\ 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{12}{L^3}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} \\ \frac{2}{L}\cdot E\cdot I & 6\cdot E\cdot\frac{I}{L^2} & \frac{4}{L}\cdot E\cdot I \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{30}\cdot L^2\cdot p \\ \frac{7}{20}\cdot L\cdot p \\ \frac{1}{20}\cdot L^2\cdot p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{12}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}\cdot p \\ \frac{7}{40\cdot E\cdot I}\cdot L^4\cdot p \\ \frac{-5}{24}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}\cdot p \end{pmatrix}$$

$K \cdot u = U$

$$\begin{pmatrix} A_l \\ M_A \\ B_l \\ M_B \\ C_L \\ M_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot L \cdot p \\ \frac{-1}{6} \cdot L^2 \cdot p \\ \frac{-17}{20} \cdot L \cdot p \\ \frac{-1}{30} \cdot L^2 \cdot p \\ \frac{7}{20} \cdot L \cdot p \\ \frac{1}{20} \cdot L^2 \cdot p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{20} \cdot L \cdot p \\ \frac{-1}{30} \cdot L^2 \cdot p \\ \frac{7}{20} \cdot L \cdot p \\ \frac{1}{20} \cdot L^2 \cdot p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot L \cdot p \\ \frac{-1}{6} \cdot L^2 \cdot p \\ -L \cdot p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De vituelle knudekræfter trækkes fra de fundne knudelaste

Bjælken opdeles i element 1 og 2

.

Element nr. 1:

$$\begin{pmatrix} V_A \\ M_A \\ V_B \\ M_B \end{pmatrix} = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{12} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot L \cdot p \\ \frac{-1}{6} \cdot L^2 \cdot p \\ \frac{-1}{2} \cdot L \cdot p \\ \frac{-1}{3} \cdot L^2 \cdot p \end{pmatrix}$$

Element 2

$$\begin{pmatrix} V_B \\ M_B \\ V_C \\ M_C \end{pmatrix} = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{12} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot p \\ \frac{7}{40 \cdot E \cdot I} \cdot L^4 \cdot p \\ \frac{-5}{24} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{20} \cdot L \cdot p \\ \frac{-1}{30} \cdot L^2 \cdot p \\ \frac{7}{20} \cdot L \cdot p \\ \frac{1}{20} \cdot L^2 \cdot p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \cdot L \cdot p \\ \frac{1}{3} \cdot L^2 \cdot p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Element 1:

$$u1(x) = \left[\left(1 - \frac{3\cdot x^2}{L^2} + \frac{2\cdot x^3}{L^3}\right)\cdot 0 - \left(x - \frac{2\cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\cdot 0 + \left(\frac{3\cdot x^2}{L^2} - \frac{2\cdot x^3}{L^3}\right)\cdot 0 + \left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{12}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}\cdot p\right)\right]$$

$$u1(x) := \frac{-1}{12}\cdot\left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right)\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}\cdot p$$

$$M1(x) = -\frac{d^2}{dx^2}u1(x)\cdot E\cdot I = \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{2}{L} - 6\cdot\frac{x}{L^2}\right)\cdot L^3\cdot p \qquad M1(x) := \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{2}{L} - 6\cdot\frac{x}{L^2}\right)\cdot L^3\cdot p$$

Element 2:

$$u2(x) = \left(1 - \frac{3\cdot x^2}{L^2} + \frac{2\cdot x^3}{L^3}\right)\cdot 0 - \left(x - \frac{2\cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{12}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}\cdot p\right) + \left(\frac{3\cdot x^2}{L^2} - \frac{2\cdot x^3}{L^3}\right)\cdot\left(\frac{7}{40\cdot E\cdot I}\cdot L^4\cdot p\right) + \left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right)\cdot\left(\frac{-5}{24}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}\cdot p\right)$$

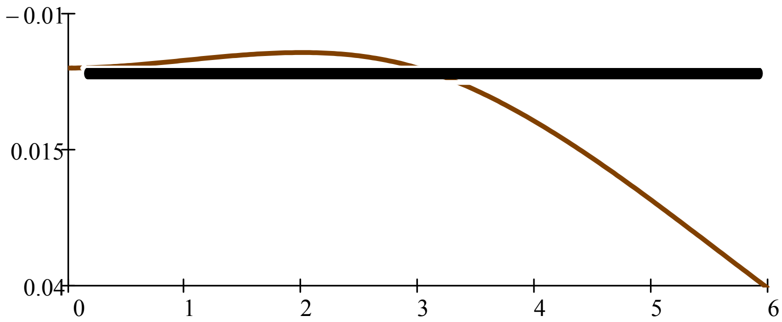
$$u2(x) := \frac{-1}{120}\cdot x\cdot L\cdot p\cdot\frac{-10\cdot L^2 - 18\cdot x\cdot L + 7\cdot x^2}{E\cdot I} \qquad M2(x) = -\frac{d^2}{dx^2}u2(x)\cdot E\cdot I = \frac{1}{20}\cdot L\cdot p\cdot(-6\cdot L + 7\cdot x)$$

## 10.2 Snitkraft kurver.

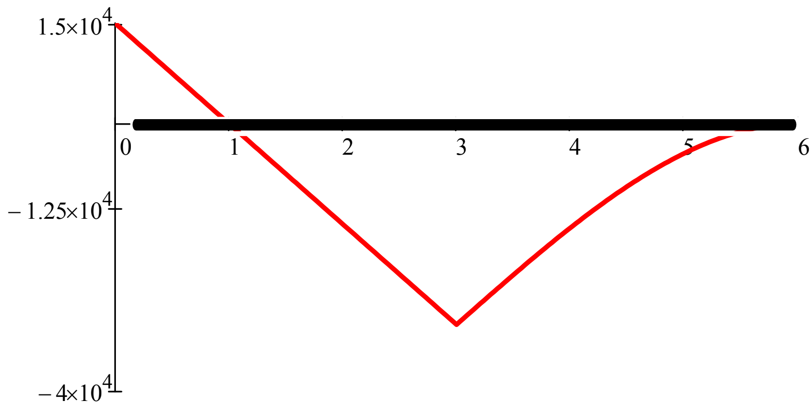
FEM beregningen giver kun resultater i knuderne. For at få førløbet af momentkurven for den fordelte last, lægges det simple moment for en trekantlast til samt virkningerne fra de virtuelle momenter:

$$M2(x) := \frac{1}{20}\cdot L\cdot p\cdot[-6\cdot L+7\cdot(x)]+\frac{1}{6}\cdot p\cdot L\cdot x\cdot\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]+\frac{-1}{30}\cdot L^2\cdot p\cdot\left(2-\frac{x+L}{L}\right)-\frac{1}{20}\cdot L^2\cdot p\cdot\frac{x}{L}$$

$$M2(x) := \frac{-1}{6\cdot L}\cdot p\cdot\left(2\cdot L^3-3\cdot L^2\cdot x+x^3\right)$$



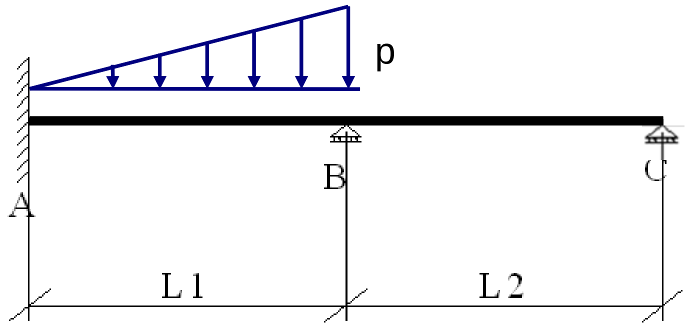

Udbøjningskurve




Momentkurve

## 10.3 Opgaver.

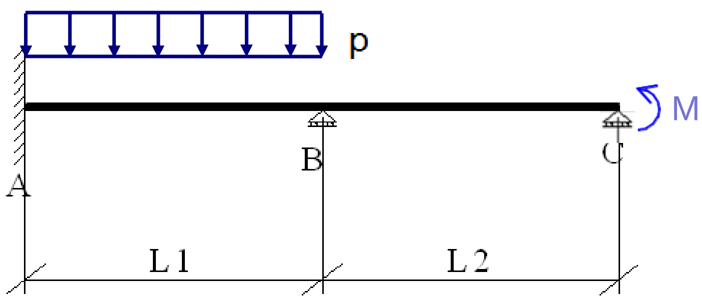
### 10.3.1 Opgave med trekantslast.




$L1 = L2$

A) Find reaktioner.
B) Optegn snitkraftkurver for forskydning og moment.
C) Kontrollér resultatet med et FEM software.

### 10.3.2 Opgave med jævnt fordelt last og moment.

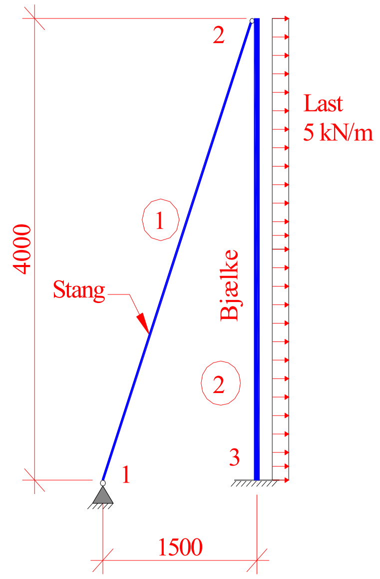



$L1 = \frac{2}{3} \cdot L2$

A) Find reaktioner.
B) Optegn snitkraftkurver for forskydning og moment.
C) Kontrollér resultatet med et FEM software.

# 11.0 Bjælke-/ramme konstruktioner

En rammekonstruktion er en bjælkekonstruktion, hvor der dels optræder normalkræfter og dels optræder bjælker, og hvor længdeaksen ikke følger det globale koordinatsystem.
Bjælkens stivhedsmatrice skal nu også indeholde bidragene fra normalkræfterne. Dette gøres ved at tillægge de bidrag, vi fandt ved behandling af stænger:
Eksempel:




$$K_e = E\cdot\begin{pmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\cdot\frac{I}{L^3} & -6\cdot\frac{I}{L^2} & 0 & -12\cdot\frac{I}{L^3} & -6\cdot\frac{I}{L^2} \\ 0 & -6\cdot\frac{I}{L^2} & 4\cdot\frac{I}{L} & 0 & 6\cdot\frac{I}{L^2} & 2\cdot\frac{I}{L} \\ -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\cdot\frac{I}{L^3} & 6\cdot\frac{I}{L^2} & 0 & 12\cdot\frac{I}{L^3} & 6\cdot\frac{I}{L^2} \\ 0 & -6\cdot\frac{I}{L^2} & 2\cdot\frac{I}{L} & 0 & 6\cdot\frac{I}{L^2} & 4\cdot\frac{I}{L} \end{pmatrix}$$

Som for stænger skal vi nu omsætte stivhedsmatricen fra det lokale system til det globale system:
$K = T^T\cdot K_e\cdot T$. For bjælker ser T matricen ud som følger:

$$T = \begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(v) & \cos(v) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

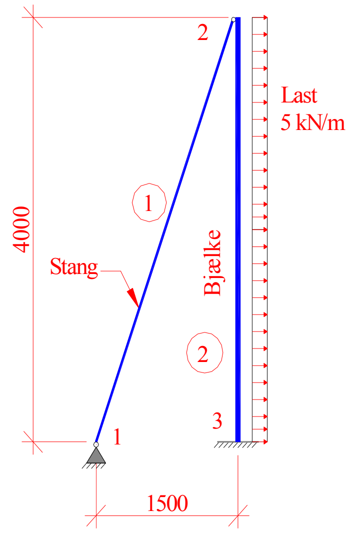
For stænger blev stivhedsmatricen i det globale koordinatsystem en $4\cdot 4$ matrix, hvor stivhedsmatricen for den tilsvarende stang i lokale koordinatsystem var en $2\cdot 2$ matrix.

For bjælker er stivhedsmatricerne i både det lokale- og det globale koordinatsystem en $6\cdot 6$ matrix. Dette hænger sammen med, at en skrå kraft altid kan projiceres i retningerne for forskydningskraft og normalkraft, mens momentet er uafhængig af vinklen.

## 11.1 Eksempel.

Nedenstående konstruktion gennemregnes med forskellige tværsnitskonstanter dels ved hjælp af kraftmetoden og dels ved hjælp af programmet Analys.
I beregningerne er indspændingsmomentet valg som den overtallige.

Forskellene i resultaterne skyldes, at normalkraftens bidrag for bjælken ikke er medregnet i arbejdsligningen.




Element 1, Ø20: $A1 := 201$ $\quad L1 := \frac{\sqrt{73}}{2} \cdot 1000$ $\quad E := 2.1 \cdot 10^5$

$I1 := \frac{\pi}{64} \cdot 16^4 \rightarrow 1024 \cdot \pi$ $\quad v := \operatorname{atan}\left(\frac{15}{40}\right)$

Element 2, HEA160: $A2 := 3880$ $\quad L2 := 4000$ $\quad I2 := 16.7 \cdot 10^6$

Last er 5 kN/m, der omsat til enkeltkræfter i knuderne giver 3/8·last·længde i toppen og 5/8·last·længde ved indspændingen.
Det globale koordinatsystem placeres med 1. aksen i bjælkens, element 2's længdeakse. Det er derfor kun element 1, der skal drejes.

$p := 5$ $\quad P2y := \frac{-3}{8} \cdot 5 \cdot L2 \rightarrow -7500$

Topologimatrix for en bjælke ser ud som T:

$$T := \begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(v) & \cos(v) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K11 = E \cdot \begin{pmatrix} \frac{A1}{L1} & 0 & 0 & -\frac{A1}{L1} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{I1}{L1^3} & -6 \cdot \frac{I1}{L1^2} & 0 & -12 \cdot \frac{I1}{L1^3} & -6 \cdot \frac{I1}{L1^2} \\ 0 & -6 \cdot \frac{I1}{L1^2} & 4 \cdot \frac{I1}{L1} & 0 & 6 \cdot \frac{I1}{L1^2} & 2 \cdot \frac{I1}{L1} \\ -\frac{A1}{L1} & 0 & 0 & \frac{A1}{L1} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{I1}{L1^3} & 6 \cdot \frac{I1}{L1^2} & 0 & 12 \cdot \frac{I1}{L1^3} & 6 \cdot \frac{I1}{L1^2} \\ 0 & -6 \cdot \frac{I1}{L1^2} & 2 \cdot \frac{I1}{L1} & 0 & 6 \cdot \frac{I1}{L1^2} & 4 \cdot \frac{I1}{L1} \end{pmatrix}$$

$$K2l = E\cdot\begin{pmatrix} \frac{A2}{L2} & 0 & 0 & -\frac{A2}{L2} & 0 & 0 \\ 0 & 12\cdot\frac{I2}{L2^3} & -6\cdot\frac{I2}{L2^2} & 0 & -12\cdot\frac{I2}{L2^3} & -6\cdot\frac{I2}{L2^2} \\ 0 & -6\cdot\frac{I2}{L2^2} & 4\cdot\frac{I2}{L2} & 0 & 6\cdot\frac{I2}{L2^2} & 2\cdot\frac{I2}{L2} \\ -\frac{A2}{L2} & 0 & 0 & \frac{A2}{L2} & 0 & 0 \\ 0 & -12\cdot\frac{I2}{L2^3} & 6\cdot\frac{I2}{L2^2} & 0 & 12\cdot\frac{I2}{L2^3} & 6\cdot\frac{I2}{L2^2} \\ 0 & -6\cdot\frac{I2}{L2^2} & 2\cdot\frac{I2}{L2} & 0 & 6\cdot\frac{I2}{L2^2} & 4\cdot\frac{I2}{L2} \end{pmatrix}$$

$K1 = T^T\cdot K1l\cdot T$ $\qquad$ $K2 = T^T\cdot K2l\cdot T$ $\qquad$ $K = K1 + K2$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ r_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1l \\ 1v \\ M1 \\ 2l \\ 2v \\ M2 \\ 3l \\ 3v \\ M3 \end{pmatrix} \qquad K_{mod} = \begin{pmatrix} K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} & K_{3,6} \\ K_{4,3} & K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} \\ K_{5,3} & K_{5,4} & K_{5,5} & K_{5,6} \\ K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} \end{pmatrix} \qquad U_{mod} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{mod} = K_{mod}^{-1}\cdot U_{mod}$$

$$U = K\cdot u$$

$$U = \begin{pmatrix} 1l \\ 1v \\ M1 \\ 2l \\ 2v \\ M2 \\ 3l \\ 3v \\ M3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.75\times 10^{4} \\ 6.57\times 10^{3} \\ -2.29\times 10^{-13} \\ 3.36\times 10^{-13} \\ -7.5\times 10^{3} \\ -8\times 10^{-10} \\ -1.75\times 10^{4} \\ 925.51 \\ 3.7\times 10^{6} \end{pmatrix}$$