

Elementmetoden
for
bjælkekonstruktioner

Lars Damkilde

Institut for Bærende Konstruktioner og Materialer
Danmarks Tekniske Højskole
DK-2800 Lyngby

Resumé

Rapporten omhandler teorien for opbygningen af et plant rammeprogram baseret på elementmetoden. Teorien opstilles primært ud fra bjælkens differentiaalligning, men i nogle afsnit benyttes arbejdsprincipper.

For det statiske tilfælde opstilles elementmetodeligningerne først for et system udelukkende med knudelast, og herefter opstilles de korrektioner, der muliggør hensyntagen til lokallast. Elementmetoden kan generelt karakteriseres som en tilnærmelsesmetode, men dette forhold fremgår normalt ikke ved statiske løsninger. I notatet er tilnærmelsesaspektet introduceret via opstilling af stivhedsmatricen for bjælkeelementer, hvor tværsnittet varierer langs bjælkeaksen. I den forbindelse gennemgås bjælkeelementernes formfunktioner detaljeret, og valget mellem eksakte eller tilnærmede formfunktioner diskuteres.

Der opstilles elementmetodeligninger til beregning af den klassiske stabilitetslast for en plan ramme. Uledelsen baseres på tilnærmede formfunktioner, og elementmetodeproblemet udledes som et lineært egenværdiproblem. På grund af de tilnærmede formfunktioner influerer elementinddelingen på nøjagtigheden, og dette forhold diskuteres ud fra eksempler.

I notatet gennemgås kort hvordan kommercielle elementprogrammer virker, og som eksempel er valgt Pafec, idet dette system er installeret på DTH-B.

Forord

Forelæsningsnotatet er skrevet til brug i kurset Bjælker & Rammer.

Formålet med notatet er at bibringe de studerende en grundlæggende forståelse for elementmetoden. Metoden er søgt fremstillet både som en systematisk formulering og videreudvikling af den traditionelle deformationsmetode til brug ved håndregning, og som et værktøj til udvikling af beregningsmetoder for egentlige 2- eller 3-dimensionale legemer som f.eks. skiver og plader.

Notatet omhandler kun plane rammer, og der gennemgås både den statiske løsning og beregning af den klassiske stabilitetslast. Ved beregning af stabilitetslasten benyttes tilnærmede formfunktioner, og dette forhold bruges til generelt at diskutere valg af elementinddeling, som har stor betydning ved anvendelse i f.eks. skive- og pladeproblemer. Tilnærmelsesaspektet er yderligere forsøgt trukket frem gennem udledelsen af stivhedsmatricen for et bjælkeelement, hvor tværsnittet varierer langs bjælkeaksen.

Traditionelt har tekster om elementmetoden for bjælkekonstruktioner gået let henover tilnærmelsesaspektet, og dette vanskeliggør - efter forfatterens mening - forståelsen af de generelle metoder/principper, der bruges senere ved elementmetode formuleringer af f.eks. skive- eller pladeproblemer.

I notatet er der tilstræbt en opbygning af løsningen i trin, således at hvert afsnit i princippet kun indeholder et enkelt problem. Dette svarer godt til den måde, man opbygger generelle elementmetodeprogrammer på. De studerende skulle derved få indtryk af, at elementmetoden er et slags æskesystem, hvor de enkelte opgaver ("æsker") er veldefinerede og har en klar afgrænsning til de øvrige. Alternativt kunne man give en mere generel formulering, men med baggrund i samtaler/diskussioner med mange studerende/projektstuderende igennem flere år er det forfatterens indtryk, at generelle formuleringer oftest først forstås efter mere "ydmyge"specialtilfælde er afklaret, og fejløpfattelser næsten altid kan henføres til en forkert opfattelse af en af de basale ideer.

Lyngby, Oktober 1990

Lars Damkilde

Forord 2. udgave

Ændringerne i denne udgave består udover almindelige rettelser af en ændring af edb-eksemplerne samt en stor forbedring af figurerens tegningsmæssige kvaliteter. Sidstnævnte havde ikke været muligt uden Norma Hornung's assistance.

Lyngby, September 1999

Lars Damkilde

Indhold

Symbolliste	iv
1 Introduktion	1
1.1 Baggrund og Formål	1
1.2 Edb-beregninger contra håndberegninger	3
1.3 Principielle forskelle mellem elementmetoden og deformationsmetoden	3
1.4 Valg af metode	5
2 Elementmetoden for rammer uden lokallast	6
2.1 Elementbeskrivelse, frihedsgrader	6
2.2 Bjælkens differentialligning, formfunktioner	9
2.3 Opstilling af elementets stivhedsmatrix	12
2.4 Transformation af stivhedsmatrix	16
2.5 Opbygning af systemstivhedsmatricen	17
2.6 Understøtningsbetingelser, løsning af ligninger	20
2.7 Anvendelse af programsystemer	24
3 Hensyntagen til lokal elementlast	27
3.1 Elementlastens ækvivalente knudekræfter	27
3.2 Opstilling af systemligninger	30
3.3 Tolkning af beregningsresultater	31
3.4 Anvendelse af færdige systemer	32
4 Elementmetoden som tilnærmelsesmetode	33
4.1 Bjælke med varierende inertimoment - analytisk løsning	33
4.2 Beregningsmetoder - bjælker med konstant tværsnit	35
4.3 Tilnærmede formfunktioner	36
4.4 Eksakte formfunktioner	38
4.5 Konklusion	41
5 Stabilitet af rammesystemer	42

5.1	Stabilitetssvigt	42
5.2	Ikke-lineært tøjningsmål	44
5.3	Arbejdsprincip	46
5.4	Opstilling af geometrisk stivhedsmatrix	47
5.5	Løsning af systemet	51
5.6	Elementinddeling	53
5.7	Anvendelse af færdigt programmel	53
6	Referencer	56

Symbolliste

Nedenfor er angivet de væsentligste symboler.

- α Drejning af bjælkeelement i forhold til X-akse
- δ Angiver virtuelle størrelser
- ϵ Generaliserede tøjninger (ϵ_x, κ)
- ϵ_x Normaltøjningen
- κ Krumningstøjningen
- λ Lastparameter
- λ_{cr} Kritisk lastparameter
- σ Generaliserede spændinger (N, M)
- θ Drejning af bjælketværsnit
- θ_1 Drejning i knude 1 (startknude)
- θ_2 Drejning i knude 2 (slutknude)
- a Parameter til beskrivelse af postbucklingtilstanden
- b Parameter til beskrivelse af postbucklingtilstanden
- \mathbf{k} Elementets stivhedsmatrix
- \mathbf{k}_g Elementets geometriske stivhedsmatrix
- l Længde af bjælkeelement
- \mathbf{p} Lokal elementlast
- \mathbf{r} Elementets knudekræfter. Lokalt koordinatsystem
- s Dimensionsløs parameter langs bjælkeakse [0;1]
- \mathbf{u} Generaliserede flytninger (u, w)
- u Aksialflytning
- u_1 Aksialflytning i knude 1 (startknude)
- u_2 Aksialflytning i knude 2 (slutknude)
- \mathbf{v} Elementets flytningsovertallige
- w Tværflytning
- w_1 Tværflytning i knude 1 (startknude)
- w_2 Tværflytning i knude 2 (slutknude)
- x Koordinat langs bjælkeakse
- $,x$ 1 gang afledet m.h.t. x
- $,xx$ 2 gange afledet m.h.t. x
- \mathbf{A}^i Topologimatrix for element i
- A Tværsnitsareal
- \mathbf{B} Tøjningsinterpolationsmatrice. ($\epsilon = \mathbf{B}\mathbf{v}$)
- \mathbf{D} Konstitutive lov. ($\sigma = \mathbf{D}\epsilon$)
- E Young's modulus
- I Inertimoment
- \mathbf{K} Systemets stivhedsmatrix
- \mathbf{K}_g Systemets geometriske stivhedsmatrix
- M Moment

N	Flytningsinterpolationsmatrice. ($\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{v}$)
N	Normalkraft
R	Systemets knudekræfter
T_{knude}	Transformationsmatrix for knude
T_{elem}	Transformationsmatrix for element
V	Systemets overtallige
X, Y	Koordinater i globalt koordinatsystem

Kapitel 1

Introduktion

1.1 Baggrund og Formål

I forbindelse med praktiske konstruktionsberegninger af rammekonstruktioner vil man næsten altid udføre snitkraftbestemmelsen med et færdigt edb-program. Resultatet af beregningen vil udover snitkræfterne normalt også give flytningerne, og på basis af dette kan man foretage en dimensionering af konstruktionen enten ved håndberegninger eller v.h.a. et andet edb-program, der måske endda direkte kan modtage resultaterne fra snitkraftberegningen.

Brugeren af sådanne programmer skal definere konstruktionens geometri, understøtningsforhold, tværsnit, materialer og belastninger i en bestemt syntaks afhængigt af programmet. Mange programmer er udstyret med grafiske hjælpeværktøjer, der gør det muligt at checke beregningsresultaterne hurtigt og sikkert, og man kan f.eks. få udtegnet konstruktionsgeometrien og flytningerne for forskellige lastkombinationer.

Man kan vælge 2 metoder, når man ønsker at tilegne sig viden om edb-orienterede beregningsmetoder. Den første, der - i hvert fald på kort sigt - er langt den nemmeste, forudsætter at den teori, som beregningsprogrammet baserer sig på, ikke er strengt nødvendig for brugen af programmet, og man derfor blot skal lære inddatasyntaksen og en vis forståelse af uddata. Den anden - og mere tidskrævende - fordrer, at brugeren får en introduktion til de bagvedliggende metoder, og herved skulle man få f.eks. en bedre forståelse for forudsætninger, krav til inddata og troværdigheden af resultaterne.

Notatet forsøger at give teorien for edb-orienterede bjælkeberegninger på en form som ligger tæt opad deformationsmetoden opstillet som håndregningsmetode. I fremstillingen baserer vi os på elementmetoden, som er en meget generel og udbredt numerisk beregningsmetode. I fagsprog omtales metoden også som FEM (Finite Element Method) eller lidt fordansket (og lidt gammeldags) de endelige elementers metode.

Tidligere blev der ofte skelnet mellem deformationsmetoden og elementmetoden, men forfatteren opfatter denne skelnen som unødvendig og i nogen grad forvirrende. Man kan, som vi senere vil vise, opfatte deformationsmetoden som et specialtilfælde af elementmetoden. Årsagen til opdelingen er, at ved bjælkekonstruktioner - i modsætning til f.eks. skive- og pladekonstruktioner - kan dele af beregningerne opstilles direkte, medens de ellers kræver

en egentlig udregning. Dette har dog kun interesse for beregningsomkostningerne og programmeringsomfanget, og er dermed uinteressant for en forståelse af metodegrundlaget.

En god indlevelse i elementmetodeprincippet vil sikre en god forståelse af teorigrundlaget for kommercielt tilgængelige bjælkeprogrammer, da de alle i en eller anden form kan opfattes som baseret på elementmetoden.

Der er tilstræbt en generel fremstillingsform som muliggør en bedre forståelse for elementmetoden anvendt på andre områder som f.eks. skive- og pladeberegninger. Udledelsen kan sine steder gøres væsentligt nemmere, idet man kan benytte resultater direkte fra deformationsmetoden. Fordelen ved den mere systematiserede fremgangsmåde er bl.a., at metoderne lettere kan udvides til også at omfatte f.eks. ikke-lineær materiale-opførsel og geometriske ikke-lineariteter. For nærværende behandles dog kun geometriske ikke-lineariteter i form af bestemmelse af den klassiske kritiske last.

Elementmetoden kan generelt beskrives som en tilnærmelsesmetode til løsning af en lang række forskellige problemtyper primært indenfor fysiske områder. Grundideen er at opdele legemet i et antal mindre, standardiserede elementer, og udfra en tilnærmet beskrivelse af de enkelte elementer at sammensætte det samlede systems opførsel. Tilnærmelsesaspektet bliver normalt behandlet noget stedmoderagtigt i tekster om bjælkeberegninger, idet man for det typiske statiske bjælkeproblem altid får den eksakte løsning under hensyntagen til regnenøjagtigheden. I dette notat er der forsøgt en mere systematisk diskussion igennem eksempler, hvor elementmetoden ikke giver den eksakte løsning. For det statiske tilfælde undersøges bjælkeelementer med ikke-konstant tværsnit, og ved stabilitetsbestemmelsen benyttes tilnærmede formfunktioner. Igennem eksemplerne diskuteres betydningen af den valgte elementinddeling, og dette skulle gøre sammenhængen med elementmetoden for andre typer konstruktioner mere klar.

I takt med en stigende udnyttelse af materialer kan man forvente større krav til beregningsmodeller, og herved forventes elementmetoden at få en endnu mere central placering i moderne konstruktionsberegning. Nedenfor er kort resumeret nogle af de punkter, hvor en god forståelse af elementmetoden vil vise sig fordelagtig fremfor en mere overfladisk indlæring af et tilfældigt programs tilfældige inddatasyntaks.

- Forståelse af teoriens forudsætninger og begrænsninger. F.eks. om programmet kun regner lineært eller kan medtage materialemæssige ikke-lineariteter.
- Forståelse for betydningen af elementinddelingen ved f.eks. stabilitetsberegninger.
- En bedre forståelse af de nødvendige inddata for herved nemmere at kunne huske og forstå en manuals forklaringer.
- Bedre til at opbygge beregningsmodeller, hvor man ikke umiddelbart kan anvende en standardmetode. Har betydning ved f.eks. specielle samlinger mellem bjælkeelementer.
- Bedre i stand til at følge udviklingen indenfor nye beregningsmetoder. F.eks. forventes stabilitetsberegninger fremover i højere grad at tage mere direkte hensyn til geometriske imperfektioner.

1.2 Edb-beregninger contra håndberegninger

Når man ønsker at overføre en håndregningsmetode til edb, er det sjældent fordelagtigt blot at programmere håndberegningens enkelte trin. Normalt er det bedre at løse opgaverne på en anden og ofte mere generel måde. Nedenfor er angivet en række punkter, hvor edb-beregninger adskiller sig fra håndberegninger.

- beregningsomfanget er af underordnet betydning.
- specialtilfælde er meget besværlige at programmere.
- edb-metoder eliminerer mere trivielle fejl som fortegnsfejl, regnefejl mm.
- edb-metoder tvinger ikke brugeren til at overveje resultaternes pålidelighed.

Når man betragter deformationsmetoden i håndregningsversionen, noterer man først at beregningsomfanget er beskedent målt med en datamats kapacitet. Et andet karakteristisk træk er, at valget af overtallige er komplekst, idet man forsøger at vælge så få som muligt, og valget afhænger af hele konstruktionens statiske virkemåde. Umiddelbart er dette vanskeligt at forestille sig omsat til edb, idet det er svært at formulere en systematisk fremgangsmåde, der samtidigt sikrer, at antallet af overtallige gøres så lille som muligt. Flytningsbeskrivelsen af konstruktionen vil også være svær at omsætte til edb, idet sammenhængen mellem konstruktionsgeometri, overtallige og understøtninger vil kræve et stort antal specialtilfælde. Samlet kan man sige, at deformationsmetoden umiddelbart er vanskelig at omsætte til edb, fordi den kræver en god indlevelse i konstruktionens virkemåde. I de følgende faser må vi altså overveje alternativer, der kan udvikles mere systematisk.

1.3 Principielle forskelle mellem elementmetoden og deformationsmetoden

Udgangspunktet i deformationsmetoden opstillet som håndregningsmetode er at vælge netop det antal geometriske overtallige, der beskriver konstruktionens flytninger. Af hensyn til håndregningernes omfang er det af stor betydning, at man ikke medtager overtallige, der kan udtrykkes ved andre overtallige. Det er ikke på nogen måde forkert at medtage for mange overtallige, men regnearbejdet kan blive noget større. For at begrænse regneomfanget vil man normalt forudsætte, at deformationer fra normalkræfter er små sammenlignet med deformationer fra bøjning.

I figur 1.1 betragter vi en konstruktion, hvor det med de angivne understøtningsbetingelser netop er tilstrækkeligt at vælge 1 overtallig nemlig drejningen i punkt B. Drejningerne i de øvrige punkter A, C og D kan bestemmes ud fra drejningen i B og eventuelle lokale belastninger. Punktet B vil hverken få vandrette eller lodrette flytninger, idet vi forudsætter forsvindende normalkraftdeformationer. Dette er ud fra et teoretisk synspunkt forkert, men for sædvanlige rammekonstruktioner er det en fuldt tilstrækkelig beskrivelse. En vandret rullebane i enten A eller C vil ikke ændre på nogen af de ovennævnte bemærkninger,

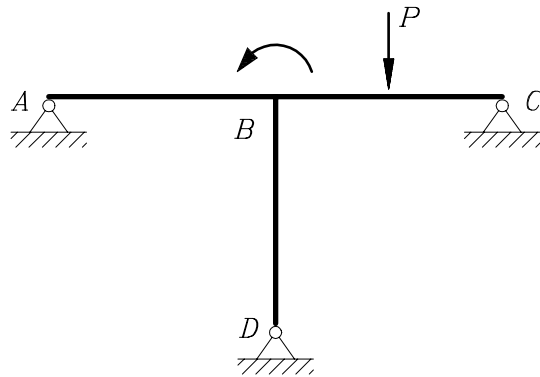


Fig. 1.1: Deformationsmetode eksempel

medens en vandret rullebane i både A og C vil kræve, at der medtages en ekstra overtallig i form af den vandrette flytning af B.

Ovennævnte simple eksempel illustrerer vanskeligheden ved at vælge overtallige på en systematisk måde, idet vi så, at antallet af overtallige i punkt B ikke alene afhang af understøtningsbetingelserne i andre punkter, men også af deres indbyrdes forhold. Alle med blot et minimalt kendskab til programmering vil forstå, at programmering af en sådan metode vil kræve en meget kompliceret programopbygning. Et af de grundliggende problemer er, at normalkraftdeformationer udelades, og at man derfor i nogen tilfælde skal medtage deformationer andre gange ikke. I tilfælde hvor konstruktionen indeholder elementer, der ikke skærer hinanden under rette vinkler, bliver dette mere udtalt, og det kan her være ganske vanskeligt at vælge de korrekte frihedsgrader.

Grundprincippet i elementmetoden er mere enkelt, idet man vælger at beskrive konstruktionen med alle de mulige overtallige. Det vil sige lodret og vandret flytning samt drejning i alle de punkter (knuder), hvor der sker ændringer i form af knæk i geometrien, ændringer i tværsnitskonstanter eller understøtninger.

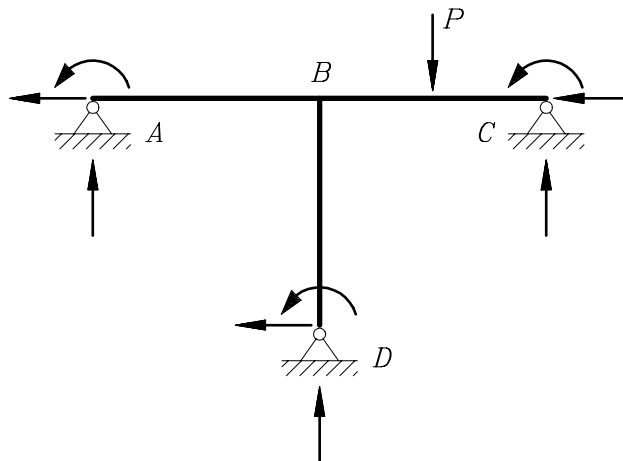


Fig. 1.2: Elementmetode eksempel

I figur 1.2 har vi optegnet konstruktionen med de ialt 12 overtallige. Notationsmæssigt beskrives drejningen af knuderne med et andet symbol, men det er kun af hensyn til de senere kapitler. Umiddelbart kan man via understøtningsbetingelserne udelade 6 af disse, men den resterende opgave vil alligevel som håndregningsopgave være næsten uoverskuelig. Fordelen ved elementmetoden er for det første, at udvælgelsen af de overtallige er meget simpel. I forrige afsnit blev algoritmen formuleret i få linier, og det er ret nemt at programmere. Yderligere ses, at man kan programmere deformationsmetoden direkte ved at opstille Z_k^j og Z_k^0 med enkle algoritmer. Bidragene til koefficienterne kan fås ved at gennemløbe alle knuder med overtallige, og for hver knude udregne delbidrag fra de tilhørende elementer. Algoritmen har en lokal karakter, idet man betragter en knude og de tilhørende elementer, og dette har store beregningsmæssige fordele. En edb-orienteret beregningsmetode baseret på kraftmetoden ville være ineffektiv, idet man ville få algoritmer med en global karakter, når flytningsbidrag skulle integreres op over hele konstruktionen.

I de følgende kapitler vil vi anvende en anden fremgangsmåde end håndregningsmetoden, men vi har allerede introduceret 2 vigtige begreber: Knuder og Elementer.

Knuder er punkter, hvortil der er tilknyttet overtallige. For plane bjælker er det lodret og vandret flytning samt en drejning, men for andre typer konstruktioner kan der være tale om andre flytningskomponenter eller afledede heraf.

Elementerne beskriver konstruktionens materielle forhold, og angiver hvorledes knuderne er forbundet. Et plant bjælkeelement vil gå fra en knude til en anden. Tværsnitsinformationerne vil være tilknyttet de enkelte elementer, og man vil normalt betragte elementer med konstante tværsnit. I kapitel 4 vil vi dog se på tilfælde med varierende tværsnitskonstanter. Andre elementtyper som skive- og plade-elementer vil have flere knuder tilknyttet (typisk fra 3 til 8), idet man her skal beskrive en trekant- eller firkant.

1.4 Valg af metode

I det forrige afsnit er deformationsmetoden som håndregningsmetode sammenlignet med elementmetoden, men det betyder på ingen måde, at de gensidigt udelukker hinanden. Langt hovedparten af konstruktionsberegninger udføres i dag på edb, men ansvaret for vurdering af resultaterne påhviler stadig konstruktionsingeniøren. I kontrolfasen har man ofte stort udbytte af at opstille forenkede modeller med ganske få frihedsgrader, og her kan man ofte med fordel anvende en forenklet håndregningsmetode.

Ved programudvikling er det vigtigt at kunne opstille simple test, som programmet skal kunne løse, og her er kendskab til deformationsmetoden uvurderlig. Testeksemplerne kan også benyttes, når man skal bruge et nyt program eller undersøge en ny facilitet i et eksisterende program.

Deformationsmetodeprincippet kan betragtes som et mere fundamentalt beregningsprincip, og det benyttes ved beregning af samspillet mellem forskellige delkonstruktioner i store komplekse konstruktioner. Deformationsmetodeprincippet er at fastholde konstruktionen i et begrænset antal punkter, og derefter successivt at frigøre de enkelte frihedsgrader og beregne fastholdelseskræfterne i de øvrige. Man beregner stivhedsforholdene for de enkelte delkonstruktioner, og løser det samlede problem med et mindre antal frihedsgrader.

Håndregningsmetoder har endvidere den fordel, at de mere direkte kan isolere enkelte parametres indflydelse. Herved kan man nemmere udføre parameterstudier, hvor man ved anvendelse af et edb-program er henvist til at køre et stort antal tilfælde, og udfra resultaterne opstille en eller anden form for kurvetilpasning.

Samlet kan man sige, at anvendelse af edb betyder mindre krav til regnehastighed og regnefærdigheder, men til gengæld kræves en mere tilbundsående forståelse af metoder/forudsætninger, idet man dimensionere tættere på grænserne end tidligere.

Kapitel 2

Elementmetoden for rammer uden lokallast

I dette kapitel vil vi forudsætte, at det plane bjælkesystem ikke er påvirket af belastninger langs elementet i form af koncentrerede eller fordelte laste. Vi vil alene betragte tilfælde med knudelaste, og dette vil danne grundlag for den senere udvidelse under hensyntagen til elementlast.

Endvidere forudsættes, at rammen er opbygget af rette, lineært elastiske elementer med konstante tværsnit. I kapitel 4 vil vi diskutere tilfælde, hvor tværsnittet kan variere langs bjælkeaksen. Krumme elementer behandles ikke i dette notat, men man kan normalt opnå rimeligt tilfredsstillende resultater ved at modellere et krumt stykke med et antal rette elementer.

2.1 Elementbeskrivelse, frihedsgrader

Konstruktionen kan opdeles i et antal retlinede elementer med konstante tværsnit. Indledningsvis ønsker vi at beskrive elementets flytninger, tøjninger og snitkræfter. Formuleringen ønskes foretaget i en matrix-notation, idet man herved nemmere kan opstille grundlaget for andre typer elementer.

Figur 2.1 viser et element, hvor aksial- og tværflytning betegnes henholdsvis u og w . Langs bjælkeaksen er indlagt en x -akse med begyndelsespunkt i det ene endepunkt, og bjælkens længde betegnes l .

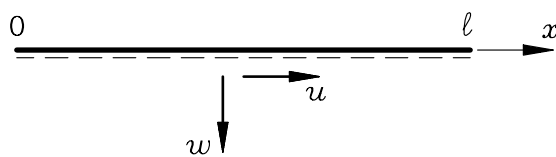


Fig. 2.1: Bjælkeelement

Flytningskomponenterne u og w samles bekvemt i en vektor \mathbf{u} , som vist i formel (2.1.1).

Umiddelbart virker det uheldigt, at \mathbf{u} hermed får to betydninger, men dette forhold er igen begrundet i tradition, og tolkningen vil fremgå af sammenhængen.

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} u \\ w \end{array} \right\} \quad (2.1.1)$$

Tøjningerne i et plant bjælkeelement består af normaltøjningen, ϵ_x og krumningen, κ . Som før samles tøjningerne i en vektor $\boldsymbol{\epsilon}$, og samtidig defineres tøjningerne på sædvanlig måde ud fra flytningerne, som vist i formel (2.1.2), hvor $,x$ og $,xx$ betegner henholdsvis 1 og 2 gange differentieret m.h.t. x .

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \kappa \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_{,x} \\ -w_{,xx} \end{array} \right\} \quad (2.1.2)$$

Bjælkens generaliserede spændinger er normalkraften, N , og momentet, M . De generaliserede spændinger indgår i det virtuelle arbejdes princip (VAP) ved at udføre arbejde igennem de generaliserede tøjninger, der for bjælkeelementet er ϵ_x og κ . Vi samler de generaliserede spændinger i vektoren $\boldsymbol{\sigma}$, som vist i formel (2.1.3). Forskydningskraften er ikke en generaliseret spænding og udfører derfor ikke noget arbejde. Den kan beregnes ud fra momentfordelingen langs bjælkeaksen.

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} N \\ M \end{array} \right\} \quad (2.1.3)$$

Igennem den konstitutive lov skabes der en sammenhæng mellem tøjningerne, $\boldsymbol{\epsilon}$ og spændingerne, $\boldsymbol{\sigma}$. Da vi forudsætter, at materialet er lineært-elastisk, og at tværsnittet er konstant fås relationen (2.1.4).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.1.4)$$

hvor \mathbf{D} -matricen er givet ved (2.1.5), og A og I betegner henholdsvis bjælkeelementets areal og inertimoment. Materialets elasticitetskoefficient (Young's Modulus) er givet ved E .

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

Efter at elementets geometriske og fysiske forhold er beskrevet, er det centrale punkt i elementmetoden at vælge en tilnærmet eller diskretiseret beskrivelse af flytnings- og dermed tøjningstilstanden i elementet. For bjælkeelementer med konstante tværsnitkonstanter er dette valg enkelt, idet man nemt kan bestemme den eksakte flytningsbeskrivelse. Af hensyn til de mere generelle aspekter af elementmetoden og senere anvendelser på andre typer bjælkeelementer foretager vi imidlertid en mere detaljeret undersøgelse.

For elementet vælger vi et antal frihedsgrader til at beskrive flytningstilstanden. I Figur 2.2 er vist de 6 frihedsgrader, som vi ønsker at benytte. Valget af frihedsgrader kan ikke foretages helt frit, og vi skal senere se, at flytningerne langs elementets bjælkeakse afhænger af frihedsgraderne. Man kan vise, at der er visse minimumskrav, som et flytningsfelt skal opfylde, men vi vil ikke i denne sammenhæng komme nærmere ind på dette. Lidt løst kan man sige, at flytningsfelterne skal sikre en passende sammenhæng mellem elementerne, og at elementet skal kunne undergå en stiftlegemebevægelse og en konstant tøjningstilstand (dvs. konstant normaltøjning og/eller en konstant krumning).

I bjælkeelementet kunne vi have tilføjet en ekstra frihedsgrad i midtpunktet bestående af en aksial flytning. Herved ville elementet bedre kunne beskrive variationer i normalkraften langs bjælkeaksen. Dette er dog normalt uvæsentligt, og man nøjes derfor næsten altid med de 6 frihedsgrader til et plant bjælkeelement.

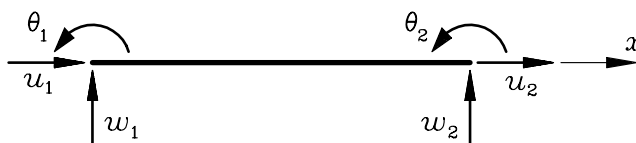


Fig. 2.2: Frihedsgrader for bjælkeelement

Frihedsgraderne ordnes bekvemt i en vektornotation, hvor vi opdeler dem svarende til start- og slutknode. Rækkefølgen er ligegyldig, og vi har valgt den normale.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

Hermed har vi beskrevet elementets ydre forhold, og dernæst skal vi beskrive flytnings- og dermed tøjningstilstanden langs elementet. Der er principielt 2 metoder, hvorefter man kan bestemme elementets opførsel. For bjælkeelementer med konstante tværsnit er metodevalget underordnet, men for andre elementtyper og for bjælkeelementer med varierende tværsnitskonstanter eller ved stabilitetsberegninger er der en væsentlig forskel.

- a** Flytningstilstanden interpoleres (oftest som polynomier) ud fra frihedsgraderne, og man benytter et arbejdsprincip (VAP) til at opstille elementets stivhedsrelationer.
- b** Ud fra problemets styrende differentiaalligninger opstilles flytningstilstanden langs elementet udtrykt ved frihedsgraderne. Metoden giver en eksakt flytningsbeskrivelse, men er i praksis meget kompliceret og generelt kun mulig ved bjælkeelementer.

Metode **a** kan betegnes den diskretiserede eller tilnærmede fremgangsmåde, medens metode **b** kan betegnes den analytiske. Flytningsbeskrivelsen i elementet udtrykkes gennem de

såkaldte formfunktioner, som vi vil vise i det følgende, og metode **a** og **b** vil normalt give forskelligt resultat. De 2 sæt formfunktioner betegnes som henholdsvis tilnærmede og eksakte.

I det følgende afsnit anvendes den analytiske fremgangsmåde, og samtidig vises, at resultatet for den tilnærmede metode i dette specialtilfælde bliver det samme. I kapitel 4, hvor elementer med ikke-konstante tværsnit behandles, vises, at de 2 metoder giver væsentlige forskelle i udledelsen, men til gengæld er ret underordnet for slutresultaterne. Generelt er den tilnærmede metode meget enklere, og i praksis er den analytiske fremgangsmåde begrænset til nogle få områder.

2.2 Bjælkens differentiaalligning, formfunktioner

For en bjælke uden belastning langs elementet er de styrende differentiaalligninger svarende til formlerne (2.2.1) og (2.2.2).

$$\frac{M}{EI} = -w_{,xx} \quad (2.2.1)$$

$$\frac{N}{EA} = u_{,x} \quad (2.2.2)$$

Da elementet ikke indeholder lokallast, kan moment- og normalkraftvariationen opskrives direkte, som vist i formlerne (2.2.3) og (2.2.4).

$$M(x) = m_0 + m_1x \quad (2.2.3)$$

$$N(x) = N_0 \quad (2.2.4)$$

Idet tværsnitskonstanterne antages uafhængige af x , fås flytningerne w og u direkte ved integration af (2.2.1) og (2.2.2), idet variationen af snitkræfterne fra (2.2.3) og (2.2.4) udnyttes. Løsningen kan principielt skrives som vist i (2.2.5) og (2.2.6).

$$w(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 \quad (2.2.5)$$

$$u(x) = u_0 + u_1x \quad (2.2.6)$$

Indføres et dimensionsløst mål for bjælkekoordinaten, s , som vist i formel (2.2.7), kan man udtrykke flytningsvariationerne af u og w fra formlerne (2.2.5) og (2.2.6) med den dimensionsløse parameter s .

$$s = \frac{x}{l} \tag{2.2.7}$$

$$w(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 s^2 + \gamma_3 s^3 \tag{2.2.8}$$

$$u(s) = \gamma_4 + \gamma_5 s \tag{2.2.9}$$

Med opstilling af formlerne (2.2.8) og (2.2.9) er flytningsbeskrivelsen i og for sig afsluttet, og man noterer - uden den store overraskelse - at aksialflytningen varierer lineært og tværflytningen kubisk langs bjælkeaksen.

I en senere fase skal vi opbygge systemer af elementer, og i den forbindelse skal vi sikre kontinuitet fra element til element. Det betyder, at der skal opstilles nogle bånd mellem γ 'erne for de forskellige elementer. Dette ville blive en meget kompleks beregning, idet endepunkternes flytninger og flytningsafledede afhænger af alle γ 'erne.

Vi vælger derfor at udtrykke flytningsvariationen fra (2.2.8) og (2.2.9) igennem nogle andre parametre - nemlig elementets frihedsgrader. Kontinuitetsbetingelserne mellem elementerne vil langt nemmere kunne udtrykkes med disse parametre.

I frihedsgraderne indgår drejningen, θ , og ved differentiation af w fra formel (2.2.8) fås.

$$\theta(s) = -w_{,x} = -\frac{1}{l}(\gamma_1 + 2\gamma_2 s + 3\gamma_3 s^2) \tag{2.2.10}$$

Opgaven med at udtrykke flytningsvariationen som funktion af frihedsgraderne løses i 2 trin, og vi behandler først tværflytningen, w . Man kan umiddelbart opstille 4 ligninger til at udtrykke $\gamma_0 - \gamma_3$ ved frihedsgraderne. I endepunkterne kan opstilles 2 randbetingelser for henholdsvis flytning og drejning. I formel (2.2.11) er betingelserne opskrevet.

$$\begin{aligned} w_1 &= -w(0) \\ w_2 &= -w(1) \\ \theta_1 &= -w_{,x}(0) \\ \theta_2 &= -w_{,x}(1) \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Ved indsættelse af w og θ fra (2.2.8) og (2.2.10) fås formel (2.2.12).

$$\begin{aligned} w_1 &= -\gamma_0 \\ w_2 &= -\gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 \\ \theta_1 &= \frac{1}{l}(-\gamma_1) \\ \theta_2 &= \frac{1}{l}(-\gamma_1 - 2\gamma_2 - 3\gamma_3) \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Hermed er opstillet 4 lineære ligninger til bestemmelse af $\gamma_0 - \gamma_3$ udtrykt ved frihedsgraderne w_1 , w_2 og θ_1 og θ_2 . Løsningen er relativ enkel, og man får som vist i (2.2.13).

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= -w_1 \\ \gamma_1 &= -l\theta_1 \\ \gamma_2 &= 3w_1 - 3w_2 + l(2\theta_1 + \theta_2) \\ \gamma_3 &= -2(w_1 - w_2) - l(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

Indsættes de fundne udtryk for $\gamma_0 - \gamma_3$ i udtrykket for w i (2.2.8), og omordnes leddene kan w udtrykkes via de overtallige på følgende måde.

$$\begin{aligned}w(s) &= w_1(-1 + 3s^2 - 2s^3) \\ &\quad + w_2(-3s^2 + 2s^3) \\ &\quad + \theta_1 l(-s + 2s^2 - s^3) \\ &\quad + \theta_2 l(s^2 - s^3)\end{aligned}\tag{2.2.14}$$

Flytningsbeskrivelsen kan udtrykkes ved de overtallige ganget en funktion, der benævnes formfunktionen. Formfunktionerne udtrykker, hvordan et element deformeres, når en frihedsgrad sættes til 1 og de øvrige til 0. I Figur 2.3 er optegnet de 4 sæt formfunktioner for tværflytningen, og man ser, at de svarer til flytningsfigurerne fra de kendte bjælkeelementtilfælde.

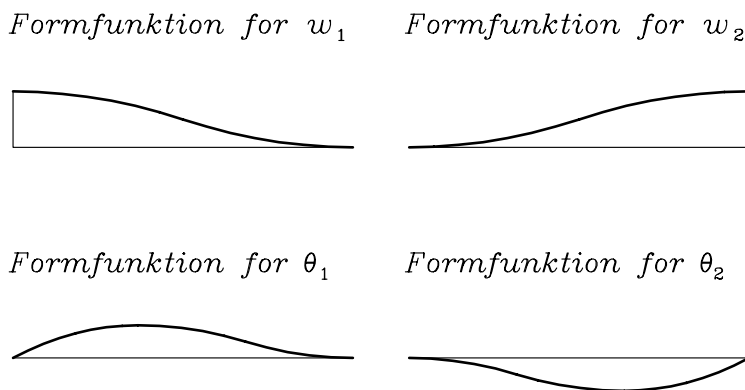


Fig. 2.3: Formfunktioner for tværflytning

Efter at have opstillet w udtrykt ved de overtallige og formfunktionerne, skal der opstilles analoge udtryk for u . Med udgangspunkt i ovenstående er det dog muligt direkte at nedskrive løsningen, idet vi ved at flytningsvariationen er lineær. Resultatet er vist i (2.2.15).

$$u(s) = u_1(1 - s) + u_2s\tag{2.2.15}$$

I Figur 2.4 er funktionerne for fuldstændighedens skyld optegnet.

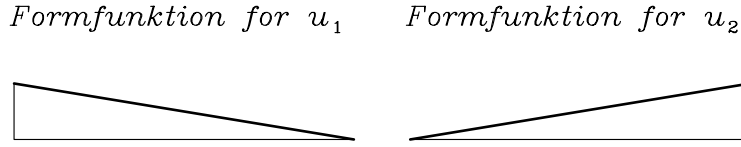


Fig. 2.4: Formfunktioner for aksialflytning

Hermed er flytningsvariationen langs bjælkeaksen udtrykt ved de overtallige \mathbf{v} og formfunktionerne, der kun afhænger af stedkoordinaten. Formel (2.1.1), der udtrykker flytningerne \mathbf{u} , skrives nu som et produkt af de overtallige \mathbf{v} og den såkaldte flytningsinterpolationsmatrix \mathbf{N} , som vist i formel (2.2.16).

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{v} \tag{2.2.16}$$

Indholdet i \mathbf{N} kan fås direkte fra formfunktionerne, og i formel (2.2.17) er resultatet vist.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1-s & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & f_2 l & 0 & f_3 & f_4 l \end{bmatrix} \tag{2.2.17}$$

hvor f_1 til f_4 er defineret i (2.2.18).

$$\begin{aligned} f_1 &= -1 + 3s^2 - 2s^3 \\ f_2 &= -s + 2s^2 - s^3 \\ f_3 &= -3s^2 + 2s^3 \\ f_4 &= s^2 - s^3 \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Analogt med definitionen af flytningsinterpolationsmatricen kan vi definere en tøjningsfordelingsmatrix, \mathbf{B} , som vist i (2.2.19).

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{v} \tag{2.2.19}$$

Indholdet i \mathbf{B} kan fås ved direkte differentiation af flytningsinterpolationsmatricen, \mathbf{N} , i henhold til tøjningsdefinitionen givet i (2.1.2). En vigtig pointe i opstillingen af flytningsrelationen (2.2.16) er, at afhængigheden af stedkoordinaterne og flytningsovertallige er delt op i 2 separate led. Tøjningsbeskrivelsen fås derfor direkte ved differentiation af den ene del, medens den senere sammenhæng mellem elementerne vedrører den anden del, \mathbf{v} . Dette er et af de meget grundlæggende træk ved elementmetoden, og det centrale er beskrivelsen af de overtallige \mathbf{v} og tøjningsfordelingsmatricen \mathbf{B} .

$$\mathbf{B} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} -l & 0 & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & -6 + 12s & (-4 + 6s)l & 0 & 6 - 12s & (-2 + 6s)l \end{bmatrix} \tag{2.2.20}$$

Tøjningsfordelingsmatricen, \mathbf{B} , viser - ikke overraskende - , at normaltøjningen er konstant og krumningen lineært varierende for de enkelte elementartilfælde. De generaliserede spændinger, dvs. normalkraft og moment kan herefter udregnes v.h.a. formel (2.1.4).

I ovenstående har vi benyttet den analytiske fremgangsmåde, men vi ville have opnået samme resultat med at interpolere flytningen langs bjælkeaksen ud fra frihedsgraderne i endepunkterne. Tværflytningen beskrives ud fra de overtallige w_1 , w_2 og θ_1 og θ_2 , og en interpolation ud fra disse værdier vil give et kubisk polynomium. Tilsvarende vil aksialflytningen interpoleres lineært ud fra u_1 og u_2 .

Interpolationsmetoden vil give det samme resultat uafhængigt af eventuelle variationer i tværsnitskonstanter, medens den analytiske fremgangsmåde vil give et andet resultat, som vi vil se nærmere på i kapitel 4.

2.3 Opstilling af elementets stivhedsmatrix

I de foregående afsnit er elementets flytnings-, tøjnings- og spændingsforhold beskrevet, og vi vil herefter behandle ligevægtsforholdene, der opdeles i *lokal ligevægt* og *global ligevægt*. Ved den lokale ligevægt forstås forholdene for et delement af bjælken, og ved den globale ligevægt forstås forholdene i knuderne.

For bjælker med konstant tværsnit og uden lokal last er den lokale ligevægt implicit opfyldt, idet vi har valgt formfunktioner, der opfylder bjælkens differentiaalligning eksakt. For bjælker med varierende tværsnitskonstanter gælder dette ikke, og vi vil i kapitel 4 undersøge dette nærmere, og vise at lokale ligevægtsforhold kan sikres ved at opfylde ligevægtligningerne på en midlet form. Elementer med lokal last undersøges i kapitel 3, og vi vil her vise, at lokal ligevægt opfyldes a priori ved at vælge en lokal spændingsfordeling, der ikke resulterer i knudedeforamationer.

Samvirken mellem elementerne sker igennem knuderne, som kan overføre kræfter. For at fastholde et element i en bestemt flytningstilstand er det nødvendigt at påvirke dette med nogle kræfter kaldet knudekræfterne, \mathbf{r} . Antallet af knudekræfter svarer til antallet af de flytningsovertallige, og således at en flytning svarer til en kraft og en drejning til et moment. Fortegnsregningen er ens både for knudekræfter og for flytningsovertallige. Knudekræfterne er at opfatte som tænkte ydre kræfter, der fastholder elementet i en bestemt position. De globale ligevægtligninger skal sikre, at summen af alle disse knudekræfter netop svarer til den ydre belastning, og dette vil blive behandlet nærmere i afsnit 2.5.

Relationen mellem knudekræfter \mathbf{r} og de flytningsovertallige \mathbf{v} må være lineær, idet vi betragter et lineært-elastisk materiale. Endvidere forudsættes, at elementet i en udeformeret tilstand er spændingsfrit, og relationen kan hermed skrives som.

$$\mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{r} \tag{2.3.1}$$

hvor vi har indført \mathbf{k} som en såkaldt stivhedsmatrix. Stivhedsmatricen er kvadratisk med dimension svarende til antallet af frihedsgrader, der for bjælkeelementet er 6. Senere vises, at \mathbf{k} har den vigtige egenskab at være en symmetrisk matrix.

Ved beregning af \mathbf{k} er der principielt 2 mulige fremgangsmåder, idet vi enten baserer os på kendte resultater fra deformationsmetoden eller benytter Virtuelt Arbejdes Princip. Førstnævnte svarer til en løsning af bjælkens differentialligning, medens den sidstnævnte er et tilnærmelsesprincip, idet man sikrer sig ligevægt opfyldt i middel. Vi vil benytte begge metoder her, dels for at kunne vise sammenhængen med deformationsmetoden, og dels for at få et værktøj til beregning af stivhedsmatricen i andre tilfælde f.eks. ved varierende tværsnitskonstanter.

Svarende til deformationsmetoden opstilles ud fra (2.3.1) et antal specialtilfælde, hvor løsningen allerede kendes. Princippet er, at en af de flytningsovertallige sættes til 1 medens de øvrige er 0. Herved kan de enkelte søjler i \mathbf{k} tolkes som de kendte elementartilfælde i deformationsmetoden. Som eksempel betragtes tilfældet, hvor startknuden gives en tværflytning 1, se (2.3.2).

$$\mathbf{v}^T = \{ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \quad (2.3.2)$$

Fra deformationsmetoden fås, at der skal påsættes ydre kræfter svarende til (2.3.3) for at systemet er i ligevægt. Bjælkelængden er som tidligere l , E er Young's modulus, og A og I er henholdsvis tværsnitsareal og inertimoment.

$$\mathbf{r}^T = \{ 0 \quad 12\frac{EI}{l^3} \quad 6\frac{EI}{l^2} \quad 0 \quad -12\frac{EI}{l^3} \quad 6\frac{EI}{l^2} \} \quad (2.3.3)$$

Ved at undersøge alle 6 specialtilfælde kan man opstille den totale stivhedsmatrix vist i (2.3.4).

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} & 0 & -12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} & 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} & 0 & 12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} & 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

Af (2.3.4) fremgår, at stivhedsmatricen, \mathbf{k} , er symmetrisk.

Alternativt udledes stivhedsmatricen ved hjælp af Virtuelt Arbejdes Princip. Dette udvides i kapitel 3 til også at omfatte lokal last på elementet.

Udgangspunktet er, at systemet er påvirket af knudekræfterne \mathbf{r} , der har resulteret i knudeflytningerne \mathbf{v} og dertil hørende tøjninger og spændinger. Systemet er i ligevægt, og det underkastes et virtuelt flytningsfelt. Vi vælger det virtuelle flytningssystem svarende til flytningsinterpolationsfunktioner, og det vil sige, at der er 6 virtuelle flytningsparametre $\delta\mathbf{v}$. De virtuelle flytninger og tøjninger kan hermed skrives som vist i (2.3.5)

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N}\delta\mathbf{v} \\ \delta\boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{B}\delta\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Herefter skal det indre og ydre virtuelle arbejde bestemmes, som angivet i (2.3.6) og (2.3.7). Det ydre virtuelle arbejde fås direkte som knudekræfterne gange de tilsvarende virtuelle flytningskomponenter, idet det bemærkes, at der ikke er lokal belastning. I matrixnotation udtrykkes dette som.

$$A_{Ydre} = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{v} \quad (2.3.6)$$

Det indre virtuelle arbejde fås ved at integrere bidraget fra de generaliserede spændingers arbejde med de virtuelle tøjninger over elementet. De generaliserede spændinger kan herefter udtrykkes ved knudedeflytningerne som vist i (2.3.7). Det bemærkes endvidere, at da de knudeovertallige, \mathbf{v} og $\delta \mathbf{v}$ er konstante, sættes de uden for integranden.

$$\begin{aligned} A_{Indre} &= \int_{element} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} dV \\ &= \int_{element} (\mathbf{DB}\mathbf{v})^T \mathbf{B} \delta \mathbf{v} dV \\ &= \mathbf{v}^T \left(\int_{element} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dV \right) \delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

I udledelsen af (2.3.7) er der endvidere benyttet, at $(AB)^T = B^T A^T$, og at \mathbf{D} er en symmetrisk matrix.

Idet $A_{Ydre} = A_{Indre}$ for et vilkårligt valg af $\delta \mathbf{v}$ fås hermed udtrykket for stivhedsmatricen, \mathbf{k} , som vist i (2.3.8).

$$\mathbf{k} = \int_{element} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dV \quad (2.3.8)$$

Af (2.3.8) fremgår direkte, at \mathbf{k} er symmetrisk, idet vi fra Linear Algebra ved, at et matrixprodukt $A^T B A$ er symmetrisk, hvis B er symmetrisk.

Som kontrol på udregningen af stivhedsmatricen v.h.a. Virtuelt Arbejdes Princip bestemmes et enkelt led, k_{22} . Ved at udregne et diagonalled lettes beregningerne lidt, idet der kun indgår et led fra tøjningsinterpolationsmatricen. Idet \mathbf{D} er en diagonalmatrix, fås umiddelbart bidraget til k_{22} som vist i (2.3.9).

$$\begin{aligned} k_{22} &= \int_{element} B_{22} D_{22} B_{22} dV \\ &= l \int_{s=0}^{s=1} \frac{1}{l^2} (-6 + 12s) EI \frac{1}{l^2} (-6 + 12s) ds \\ &= \frac{EI}{l^3} \int_{s=0}^{s=1} (36 - 144s + 144s^2) ds = 12 \frac{EI}{l^3} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

hvilket svarer til resultatet fra deformationsmetoden.

Med formuleringen af stivhedsmatricen ud fra Virtuelt Arbejdes Princip er der åbnet op for bestemmelse af \mathbf{k} for elementer, hvor tværsnitskonstanterne varierer langs bjælkeaksen. Ved beregning af $\int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$ vil man normalt anvende numerisk integration som f.eks. Gauss-integration. Hvis \mathbf{D} varierer som et polynomium i s , kan man med passende høj Gauss-integration opnå eksakte resultater (indenfor regnenøjagtigheden). I øvrigt henvises til kapitel 6, hvor der er listet forskellige referencer, der behandler Elementmetoden mere dybtgående.

Flytningsfeltet \mathbf{v} skal som omtalt i afsnit 2.1 tillade en vilkårlig stiftlegemebevægelse uden resulterende knudekræfter. Dette er et generelt krav, som alle typer elementer skal opfylde. De 3 stiftlegemebevægelser for et plant bjælkeelement består af en vandret translation, en lodret translation og en vilkårlig rotation f.eks. om startknuden. I (2.3.10) er opstillet udtryk for de 3 flytningsvektorer.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T &= \{ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \} \\ \mathbf{v}^T &= \{ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \} \\ \mathbf{v}^T &= \{ 0 \ 0 \ \frac{1}{l} \ 0 \ 1 \ \frac{1}{l} \} \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Ved udregning af $\mathbf{k}\mathbf{v}$ ses, at knudekraftvektoren $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ i alle 3 tilfælde.

2.4 Transformation af stivhedsmatrix

Hidtil har vi behandlet det enkelte element uafhængigt af det system, som det indgår i. I næste afsnit skal vi opstille de globale ligevægtsligninger, og her er der brug for at kunne sætte forskellige elementer sammen uanset deres placering i planen.

Vi ønsker derfor at kunne udtrykke elementets stivhedsrelation, $\mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{r}$, i et koordinatsystem, der ikke følger bjælkeaksen. Elementet indlægges i et globalt koordinatsystem med X - og Y -akser som vist i Figur 2.5. Elementets drejning i forhold til den globale X -retning betegnes α .

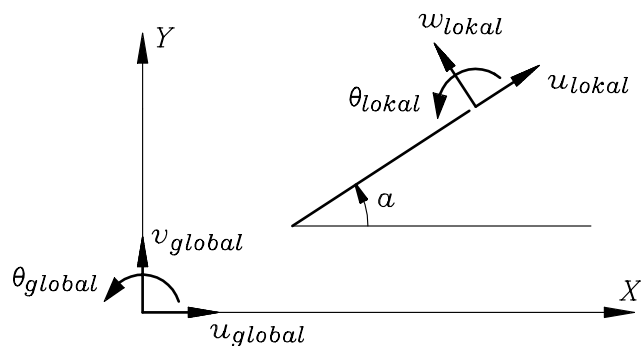


Fig. 2.5: Bjælkeelement i globalt ligningssystem

En knudes flytninger kan både udtrykkes i det lokale og globale koordinatsystem, og flytningerne samles i 2 vektorer betegnet henholdsvis $\mathbf{v}_{lokal}^{Knude}$ og $\mathbf{v}_{global}^{Knude}$, se (2.4.1) og (2.4.2).

$$\mathbf{v}_{lokal}^{Knude} = \begin{Bmatrix} u_{lokal} \\ w_{lokal} \\ \theta_{lokal} \end{Bmatrix} \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{v}_{global}^{Knude} = \begin{Bmatrix} u_{global} \\ v_{global} \\ \theta_{global} \end{Bmatrix} \quad (2.4.2)$$

Der kan umiddelbart opstilles en matrix-relation mellem $\mathbf{v}_{lokal}^{Knude}$ og $\mathbf{v}_{global}^{Knude}$ givet ved (2.4.3).

$$\mathbf{v}_{lokal}^{Knude} = \mathbf{T}_{knude} \mathbf{v}_{global}^{Knude} \quad (2.4.3)$$

hvor \mathbf{T}_{knude} er defineret i (2.4.4).

$$\mathbf{T}_{knude} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

I det følgende skal \mathbf{T}_{knude}^{-1} benyttes, og man kan enten eftervise relationen (2.4.5) eller hente den fra "Linear Algebra".

$$\mathbf{T}_{knude}^{-1} = \mathbf{T}_{knude}^T \quad (2.4.5)$$

Transformationen gælder både flytningsovertallige og knudekræfterne. Idet vi ønsker at transformere hele stivhedsrelationen, skal vi udvide transformationen til at gælde alle over-tallige. Transformationerne er ens i begge elementets endepunkter, og vi får umiddelbart elementets transformationsmatrix, \mathbf{T}_{elem} , udtrykt ved (2.4.6).

$$\mathbf{T}_{elem} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{knude} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{knude} \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

Relationen åbner mulighed for at operere med to forskellige globale koordinatsystemer i hver bjælkeende. En mulighed kommercielle elementsystemer benytter, og som f.eks. er en fordel ved understøtninger, der ikke alle følger et globalt systems hovedretninger og ved sammenknytning af forskellige elementtyper.

Idet elementets flytningsovertallige i henholdsvis det lokale og globale system betegnes \mathbf{v}_{lokal} og \mathbf{v}_{global} fås formel (2.4.7).

$$\mathbf{v}_{lokal} = \mathbf{T}_{elem} \mathbf{v}_{global} \quad (2.4.7)$$

Som før gælder relationen også for knudekræfter, og for den inverse transformationsmatrix fås analogt med (2.4.5) formelen (2.4.8).

$$\mathbf{T}_{elem}^{-1} = \mathbf{T}_{elem}^T \quad (2.4.8)$$

Herefter kan vi omskrive stivhedsrelationen $\mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{r}$ som vist i (2.4.9).

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{lokal} \mathbf{v}_{lokal} &= \mathbf{r}_{lokal} \\ \mathbf{k}_{lokal} \mathbf{T}_{elem} \mathbf{v}_{global} &= \mathbf{T}_{elem} \mathbf{r}_{global} \\ \mathbf{T}_{elem}^T \mathbf{k}_{lokal} \mathbf{T}_{elem} \mathbf{v}_{global} &= \mathbf{r}_{global} \\ \mathbf{k}_{drejet} \mathbf{v}_{global} &= \mathbf{r}_{global} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Hermed er elementets stivhedsrelation udtrykt i et vilkårligt koordinatsystem, og der er indført en transformeret stivhedsmatrix, \mathbf{k}_{drejet} . Sidstnævnte er betegnet "drejet" for ikke at forveksle det med systemets totale eller globale stivhedsmatrix, \mathbf{K} , som bliver beskrevet i næste afsnit. Af hensyn til senere referencer opskrives den transformerede stivhedsmatrix i (2.4.10).

$$\mathbf{k}_{drejet} = \mathbf{T}_{elem}^T \mathbf{k}_{lokal} \mathbf{T}_{elem} \quad (2.4.10)$$

Den transformerede stivhedsmatrix er stadig symmetrisk.

2.5 Opbygning af systemstivhedsmatricen

I dette afsnit betragter vi et samlet system bestående af et antal elementer, der er indbyrdes forbundne gennem et antal knuder. Knuderne er nummereret fra 1 til antallet af knuder, *nno* (number of nodes). Systemets flytningsovertallige samles i en vektor \mathbf{V} , der opbygges af de enkelte knuders flytningsovertallige, som vist i (2.5.1).

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{nno} \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

Ved plane bjælkeelementer vil hver af komponenterne v_i bestå af 3 overtagelige, 2 flytninger og 1 drejning. I en mere generel elementmetodesammenhæng vil antallet af frihedsgrader

per knude kunne variere fra knude til knude, hvilket komplicerer programopbygningen, men i øvrigt ikke ændrer de grundlæggende forhold.

Svarende til et elements stivhedsrelationer kan man opbygge systemets stivhedsrelationer, som vist i (2.5.2).

$$\mathbf{KV} = \mathbf{R} \tag{2.5.2}$$

hvor \mathbf{K} betegner systemstivhedsmatricen, og \mathbf{R} er den globale knudekraftvektor.

Knudekraftvektoren er opbygget efter samme princip som den globale flytningsvektor, \mathbf{V} , og indeholder alle de ydre kræfter som påvirker systemet.

I det følgende vil vi undersøge, hvorledes \mathbf{K} og \mathbf{R} er opbygget udfra de enkelte elementers og knuders bidrag.

Det samlede systems stivhed er lig summen af de enkelte elementers stivhed defineret ved \mathbf{k}_{drejet}^i , hvor i betegner elementnummeret, og stivhedsmatricen er transformeret til et globalt system svarende til formel (2.4.10).

Et element giver bidrag i den globale stivhedsmatrix, \mathbf{K} , svarende til pladserne i den globale knudeflytningsvektor, \mathbf{V} , som elementets start- og slutknude har. I Figur 2.6 er denne sammenhæng illustreret.

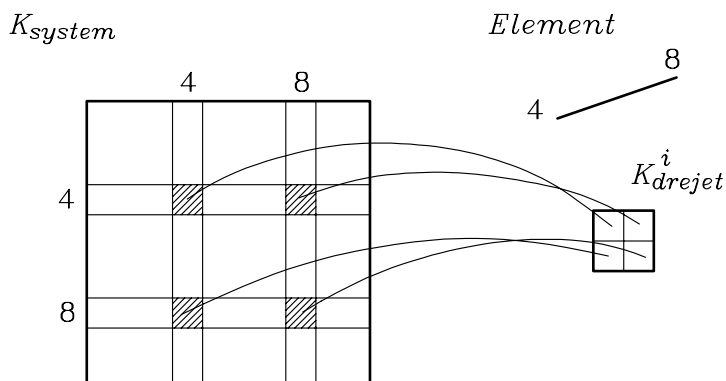


Fig. 2.6: Sammenhæng mellem en lokal stivhedsmatrix og system stivhedsmatricen

Opstillingen af stivhedsbidraget kan også opstilles i en matrixformulering, der viser den principielle sammenhæng. Som programmeringsgrundlag er den imidlertid ikke velegnet, da den ville medføre et meget stort antal unødvendige beregninger.

Sammenhængen mellem et element i 's lokale flytninger og den globale flytningsvektor kan skrives som vist i (2.5.3).

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{V} \tag{2.5.3}$$

Matricen \mathbf{A}^i angiver den såkaldte topologiske sammenhæng mellem element i og systemet. Dimensionen af \mathbf{A} er antallet af knuder i elementet gange antallet af systemets knuder,

og de enkelte elementer i \mathbf{A} er 3 gange 3 matricer (3 frihedsgrader per knude). Matricen vil kun have 2 elementer forskellig fra $\mathbf{0}$ svarende til start- og slutknuden for elementet. Ikke nul-elementer vil svare til enhedsmatricen, \mathbf{E} , idet vi i bjælketilfældet altid vil have en simpel sammenhæng mellem en lokal og global knudeflytning. For et element i med start- og slutknude, n_1 og n_2 kan \mathbf{A}^i skrives som vist i (2.5.4).

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{E} & \cdots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & & & \cdots & \mathbf{E} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.5.4)$$

hvor enhedsmatricen, \mathbf{E} er placeret i henholdsvis søjlenummer n_1 og n_2 .

Systemets stivhedsmatrix kan hermed skrives som en sum over antallet af elementer, *nelem* (number of elements), som vist i (2.5.5).

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{nelem} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{k}_{drejet}^i \mathbf{A}^i \quad (2.5.5)$$

System stivhedsmatricen \mathbf{K} er symmetrisk, som det direkte fremgår af (2.5.5), og man vil derfor ved opbygningen af matricen kun beregne halvdelen f.eks. diagonalen og den øverste trekant. Dette forhold gælder også ved beregningen af den transformerede lokale stivhedsmatrix, og man opbygger programmerne, således at symmetrien udnyttes bedst muligt.

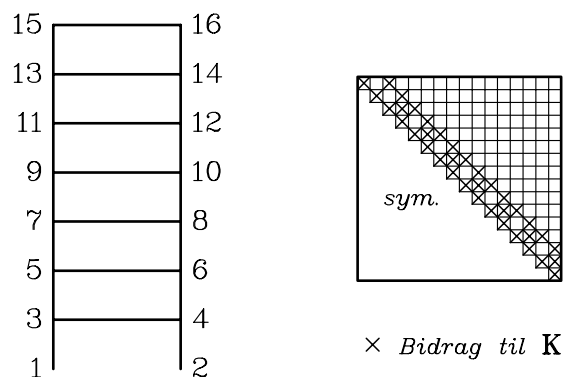


Fig. 2.7: Optimal knudenummerering

Opbygningen af højresiden \mathbf{R} er mere enkel, idet vi direkte betragter den ydre belastning som knyttet til de globale knudenumre. De enkelte elementer i \mathbf{R} svarer således til belastningen i den tilsvarende knudeovertallige i form af enten en kraft eller et moment. Reaktionen behandles i næste afsnit, og de svarer til de kræfter, som skal påsættes systemet for at overholde de geometriske randbetingelser i form af f.eks. en fast indspænding. De lokale højresider \mathbf{r} indgår ikke direkte, men svarende til opbygningen af \mathbf{K} kan \mathbf{R} betragtes som en summation over alle elementers højresidebidrag, og matrixformuleringen fra formel (2.5.5) kan anvendes. Dette forhold får betydning i kapitel 3, hvor vi behandler lokal last på elementet, og i dette tilfælde kan belastningen ikke direkte henføres til knuderne.

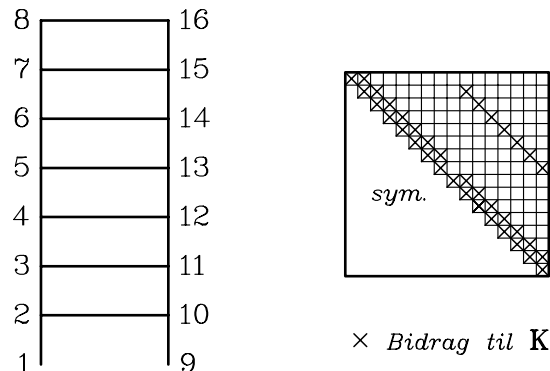


Fig. 2.8: Alternativ knudenummerering

Som det fremgår af Figur 2.6 og (2.5.5) giver det enkelte element kun stivhedsbidrag i 4 områder. Endvidere vil der i systemstivhedsmatricen \mathbf{K} være et stort antal 0'er, som viser, at 2 frihedsgrader ikke er forbundet direkte gennem et element. Det store antal 0-elementer kan udnyttes beregningsmæssigt på forskellige måder. Den mest traditionelle er at placere alle stivhedsbidrag omkring diagonalen, og derved få isoleret en øvre- og nedre- trekantsmatrix udelukkende med 0-elementer. Dette kan udnyttes beregningsteknisk ved en såkaldt "båndligningsløser", som vi vil beskrive mere detaljeret i næste afsnit. Båndligningsstrategien bruges også til at begrænse lagerpladsen til systemstivhedsmatricen, idet man ikke lagrer systemet på kvadratisk matrixform, men definerer et område svarende til diagonalen og det øvre bånd.

I Figur 2.7 og 2.8 er den samme konstruktion nummereret på 2 forskellige måder, og resultatet er en meget forskellig "båndbredde" defineret som antallet af sub-diagonaler med elementer forskellig fra 0. Båndbredden defineres nærmere i næste afsnit, og her er det tilstrækkeligt, at båndbredden er proportional med den største absolutte forskel mellem nummeret på start- og slutknode taget over alle elementer. Der findes algoritmer til optimering af båndbredden, og vi vil derfor ikke gøre meget ud af principper for knudenummerering. Mange kommercielle systemer anvender enten andre metoder til ligningsløsning, som omtales nærmere i næste afsnit, og/eller har indbyggede optimeringsrutiner til minimering af beregningsomfanget. En simpel og god regel er at nummerere på den korte led som vist i Figur 2.7 og 2.8. Båndligningsløserens tidsforbrug er proportionalt med båndbreddens kvadrat, og forskellen i de 2 nummereringer giver en faktor på ca 10 på beregningstiden. I næste afsnit beskrives dette mere detaljeret.

2.6 Understøtningsbetingelser, løsning af ligninger

Udgangspunktet for løsningen er et lineært ligningssystem, som blev formuleret i (2.5.2), og som er gentaget nedenfor af overskuelighedsgrunde.

$$\mathbf{KV} = \mathbf{R} \tag{2.6.1}$$

Systemet kan understøttes igennem de overtallige, og en understøtning svarer til, at den pågældende frihedsgrad antager en bestemt værdi. Understøtningsbetingelsen er normalt, at flytningen eller drejningen skal være 0, men man kan også påføre understøtninger ved at kræve en bestemt sætning svarende til, at den flytningsovertallige får en værdi $\neq 0$.

Der er principielt 2 måder at indføre understøtningsbetingelserne på. Den ene kaldes "de stive fjedres" metode, medens den anden består i en mere direkte eliminering af flytningsbetingelsen. "De stive fjedres" metode er nem at programmere, men er sværere at udvide til også at omhandle sætninger.

Udgangspunktet for "de stive fjedres" metode er, at en understøtning svarer til en meget stiv (principielt uendelig stiv) fjeder. En fjederunderstøtning med stivheden k af en frihedsgrad, j , indføres ved følgende formel (2.6.2).

$$k_{jj}^{total} = k_{jj}^{system} + k_{fjeder} \quad (2.6.2)$$

hvor k_{jj}^{system} angiver stivhedsbidraget fra de tilstødende bjælkeelementer.

Proceduren ved metoden er så blot at indføre en tilpas stor fjederstivhed i alle understøtninger, og derefter løse ligningssystemet udfra metoder fra "Linear Algebra". Selve ligningsløsningen behandles ikke her, da den svarer til løsningen i den anden metode. Bestemmelsen af en tilstrækkelig stor stivhed er afgørende for løsningens kvalitet, idet man enten risikerer at få valgt en for lille stivhed, der resulterer i bevægelser af understøtningerne, eller man vælger en for stor stivhed, der kan medføre tab af nøjagtighed, som i værste tilfælde kan give ubrugelige resultater. I praksis er problemet ikke stort, og man vælger normalt stivheden udfra det største diagonalelement i den globale stivhedsmatrix multipliceret med en passende stor faktor (typisk 10^{10}). Reaktionen i knude j kan bestemmes direkte som $k_{jj}^{total} v_j$.

Ved den direkte eliminering opdeles ligningssystemet i 2 svarende til flytninger, der henholdsvis kan variere eller er kendte. Opdelingen er vist i (2.6.3), hvor rækkefølgen af de overtallige er ændret, således at de kendte flytninger er samlet fornedet. I praksis foregår opdelingen ikke ved rent fysisk at flytte ligningerne, men ved at indføre et passende logisk valg i programmet.

$$\mathbf{K}_{system} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.6.3)$$

Da \mathbf{K} er symmetrisk, gælder der i (2.6.3), at $\mathbf{K}_{21}^T = \mathbf{K}_{12}$.

Svarende til stivhedsmatricen opdeles flytningsvektoren, \mathbf{V} , og belastningsvektoren, \mathbf{R} som vist i (2.6.4).

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{frie} & \mathbf{V}_{faste} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{last} & \mathbf{R}_{reaktion} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Antallet af kendte flytninger svarer per definition til antallet af reaktioner, idet en overtallig enten er foreskrevet eller fri, og hvis den er foreskrevet vil den tilsvarende knudekraft netop afpasses, så understøtningsbetingelsen er opfyldt.

Ved at indføre opdelingen af \mathbf{K} , \mathbf{V} og \mathbf{R} i det oprindelige ligningssystem (2.6.1) kan der opstilles 2 matrixligninger, som vist i (2.6.5) og (2.6.6).

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{V}_{frie} = \mathbf{R}_{last} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{V}_{faste} \quad (2.6.5)$$

$$\mathbf{R}_{reaktion} = \mathbf{K}_{22}\mathbf{V}_{faste} + \mathbf{K}_{21}\mathbf{V}_{frie} \quad (2.6.6)$$

Løsningsmetoden er først at løse ligningssystemet (2.6.5), og derefter ud fra de beregnede flytninger, \mathbf{V}_{frie} , at bestemme reaktionerne, $\mathbf{R}_{reaktion}$ ud fra (2.6.6).

Ved begge metoder skal man løse et lineært ligningssystem, $\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{R}$, hvilket formelt svarer til at bestemme \mathbf{K}^{-1} . Inverteringen af \mathbf{K} kræver, at \mathbf{K} er ikke-singulær. Under ligningsløsningen bestemmer man, om \mathbf{K} er singulær, og i givet fald er systemet uløseligt forstået således, at der eksisterer enten ingen eller en uendelighed af løsninger. For mekaniske systemer vil en singularitet altid betyde, at der eksisterer uendeligt mange løsninger, som resulterer i en bevægelig konstruktion. En konstruktion kan være bevægelig - eller som det også udtrykkes statisk overbestemt - på flere måder. Enten er de ydre understøtninger for få, og så er konstruktionen "globalt"statisk overbestemt, eller også er konstruktionen "indre"statisk overbestemt f.eks. igennem indre charnierer.

Ved løsningen af det lineære ligningssystem foretages ikke en egentlig invertering af \mathbf{K} , men man foretager en faktorisering af ligningssystemet. Matricen kan herved skrives som et produkt af en nedre og en øvre trekantsmatrix, hvor vi ved en trekantsmatrix forstår en matrix med lutter 0'er enten over eller under diagonalen.

Fremgangsmåden betegnes Gauss elimination, og den består i gennem såkaldte rækkeoperationer, dvs. at trække ligninger fra hinanden, at skaffe 0'er under diagonalen. Det første trin kaldes "forward-substituering", og derefter foretages en "backward-substituering", hvorved der skaffes 0'er over diagonalen. Hermed kan løsningen bestemmes, idet den tilbageværende diagonalmatrix let inverteres. Matricens symmetri kan udnyttes, således at en del beregninger udelades, men dette henvises til "Numerisk Analyse".

Ligningssystemet vil for lineære problemer altid være velkonditioneret, således at pivotering af ligningssystemet er unødvendig (jvf. igen "Numerisk Analyse").

Ved beregning af flere lasttilfælde kan man udnytte, at stivhedsmatricen kun skal faktoreres een gang. Faktoriseringen af \mathbf{K} er det væsentligste bidrag til beregningstiden, og ekstra belastningstilfælde er derfor ret billige.

Som nævnt i forrige afsnit vil man normalt udnytte, at stivhedsmatricen indeholder et stort antal 0'er. Den enkleste måde er at benytte en såkaldt båndligningsløser, hvor stivhedsmatricen er organiseret, således at alle ikke 0-elementer koncentrerer om diagonalen. Båndbredden defineres som bredden af det bånd, der indeholder alle ikke 0-elementer. I bredden af båndet medtages diagonalen ikke.

For plane bjælkekonstruktioner, hvor der er 3 overtallige per knude, og hvor knudenumrene er fortløbende, findes båndbredden, bw , ud fra nedenstående formler (2.6.7) og (2.6.8).

Indledningsvis bestemmes den største absolutte forskel mellem nummeret på start- og slutknuden for alle elementer, n_{max} .

$$n_{max} = \max_{i=1, \text{elementantal}} (|n_1^i - n_2^i|) \quad (2.6.7)$$

hvor n_1^i og n_2^i betegner henholdsvis nummeret på start- og slutknuden for element, i .
Da der er 3 frihedsgrader per knude, fås båndbredden hermed umiddelbart til.

$$bw = 3n_{max} + 2 \quad (2.6.8)$$

Tidsforbrug ved ligningsløsningen afhænger af metodevalget, og nedenfor gives estimerede omkostninger for henholdsvis fuldt besatte ligningssystemer og båndligningssystemer. Der betragtes kun antallet af multiplikationer, idet disse giver det væsentligste bidrag til regnetiden, og matricerne forudsættes symmetriske. For et fuldt besat ligningssystem, dvs. et system hvor båndbredden svarer til antallet af overtallige (n) -1, er regnetiden, T_{fuld} givet ved (2.6.9), og for båndligningssystemet bestemmes tiden $T_{bånd}$ ved (2.6.10).

$$T_{fuld} = C \frac{1}{3} n^3 \quad (2.6.9)$$

$$T_{bånd} = Cn(bw)^2 \quad (2.6.10)$$

hvor C er en konstant, der angiver den konkrete computers regnehastighed. Som det fremgår af formlerne (2.6.9) og (2.6.10), er regnetiden meget afhængig af størrelsen af båndbredden, hvilket også blev vist i det foregående afsnit.

K-matricens store antal 0'er kan udnyttes mere effektivt ved andre metoder som profil-ligningsløserne eller frontligningsløserne, og der henvises til mere generel litteratur om Elementmetoden, se kapitel 6. Her skal blot bemærkes, at problemet med båndligningsløseren er, at hvis blot et element har en stor båndbredde straffes det samlede system. De andre metoder udnytter dette forhold, og beregningstiden bliver proportional med kvadratet på en gennemsnitlig båndbredde. Til gengæld kræver metoderne en mere kompliceret administration, som både kræver større programmeringsindsats og et overhead i beregningstiden. Langt de fleste kommercielle systemer anvender enten frontmetoden eller profilligningsløserne.

Hidtil har vi forudsat, at understøtningerne virker i de globale koordinat/-retninger, men hvis dette ikke er tilfældet, har man principielt 2 fremgangsmåder. En metode er at transformere de lokale stivhedsmatricer over i et drejet koordinatsystem for de knuder, der skal understøttes skråt. Hermed får man udtrykt den globale stivhedsmatrix i et system, hvor de skrå understøtningers frihedsgrader fremtræder direkte, og herefter anvendes den tidligere beskrevne metode. Denne metode har andre fordele, og anvendes ofte af større kommercielle elementsystemer.

Alternativt kan man efter sammensætningen af den globale stivhedsmatrix foretage en transformering af de skrå understøtningers frihedsgrader. Transformeringen følger helt ideen fra afsnit 2.4, og den globale stivhedsmatrix bliver udtrykt i det drejede system, hvorefter fremgangsmåden er som ovenstående. Slutresultatet bliver ens for de 2 metoder, men beregningstiden for sidstnævnte metode er lidt mindre, idet man kun foretager en transformering, selvom denne omfatter flere frihedsgrader. Grunden til, at den første metode foretrækkes i større systemer, er, at transformeringen herved bliver en lokal proces, der kun involverer et enkelt element af gangen. Processer, der involverer hele stivhedsmatricen, kræver generelt mere arbejdslager og en mere krævende administration. I forbindelse med nye datamatyper som parallel-processering er lokale processer også at foretrække, idet transformeringerne i de enkelte elementer er uafhængige af hinanden.

Efter at de globale flytninger \mathbf{V} er bestemt, kan man bestemme det enkelte elements flytninger, idet man benytter transformationsformlerne, (2.5.5) og (2.4.7) omvendt.

Med udgangspunkt i de lokale elementflytninger, \mathbf{v} , kan man bestemme tøjningerne og hermed spændingerne. I næste afsnit medtages lokal last på elementet, og hermed får man behov for at kunne bestemme snitkræfterne i et vilkårligt punkt i bjælken.

2.7 Anvendelse af programsystemer

Ved anvendelse af færdige programsystemer skal man dels kunne opstille de nødvendige inddata og dels kunne tolke uddata rigtigt. Afsnittet er tænkt som en generel indføring i nogle af de grundlæggende problemstillinger, men skal på ingen måde opfattes som fuldstændigt. Målet er at skaffe læseren et lidt bedre overblik, således at læsning af manualer mm. gøres lettere.

Data til ethvert lineært, statisk rammeprogram kan principielt grupperes i 5 områder: knuder, elementer, tværsnit/materialer, understøtninger og belastning. Herudover kan inddata bestå af forskellige kontroldata, der angiver analyseform, uddatamængder mm. Mange rammeprogrammer er udstyret med forskellige såkaldte genereringsfaciliteter, der sætter brugeren i stand til at definere inddata på en nem måde. Genereringsordrene har imidlertid alene til opgave at øge brugerens effektivitet, og vil derfor ikke blive behandlet i denne sammenhæng.

I Figur 2.9 er der givet en principiel sammenhæng mellem datagrupperne, Knude, Element, Tværsnit/Materialer og Understøtninger. I næste afsnit vil der i Figur 3.3 blive vist en tilsvarende sammenhæng, der inkluderer belastningen.

Opbygningen af datastrukturen svarer til en relationel datastruktur, idet data er defineret i forskellige tabeller, og igennem opslag i andre tabeller hentes relevante data. Den relationelle opbygning sikrer, at data kun defineres en gang, således at der spares plads, og således at data nemmere kan rettes, hvad der er langt det væsentligste. Alle data er enten *Knude*- eller *Element*-relaterede, som det fremgår af Figur 2.9.

Nedenfor er vist inddata til Cosmos-programsystemet, og inddata svarer til konstruktionen vist i Figur 2.10. Inddata er opbygget, så der kun forekommer knudelast, og elementlast vil blive behandlet i det følgende kapitel.

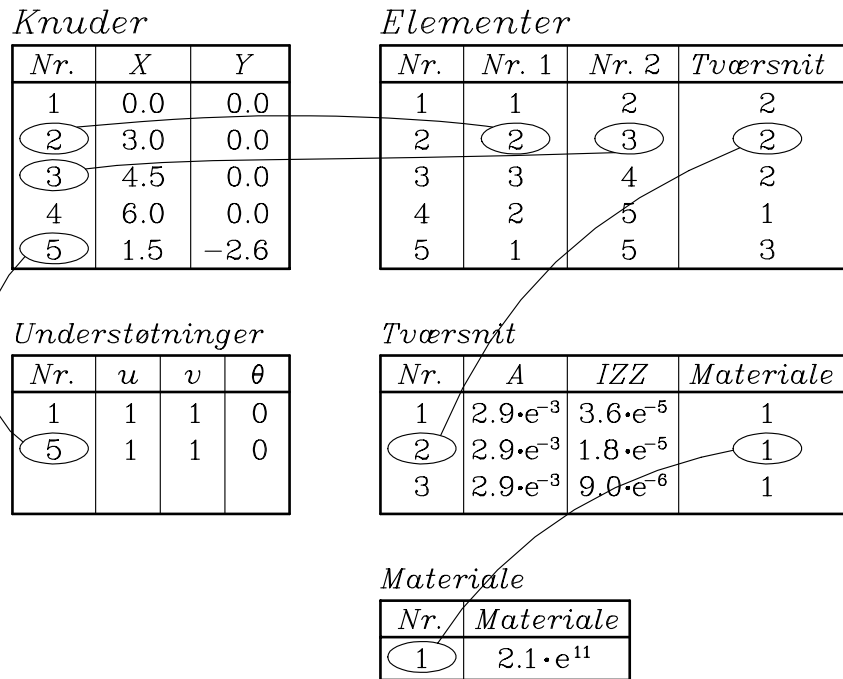


Fig. 2.9: Sammenhæng mellem inddata-blokke (relational struktur)

```

c*
c*  Eksempel 1 - Elementmetoden for bjælkekonstruktioner, l = 3.0 m
c*
c*  Knuder
c*
nd, 1, 0.0, 0.0;
nd, 2, 3.0, 0.0;
nd, 3, 4.5, 0.0;
nd, 4, 6.0, 0.0;
nd, 5, 1.5, -2.6;
c*
c*  Bjælke-element, materiale
c*
egroup, 1, beam2d
mprop, 1, ex, 2.1e11
c*
c*  Tværsnit og element-definition
c*
c*  2EI
c*
rconst, 1, 1, 1, 5, 2.9e-3, 3.6e-5, 0.2;
el, 4, cr, , 2, 2, 5;
c*

```

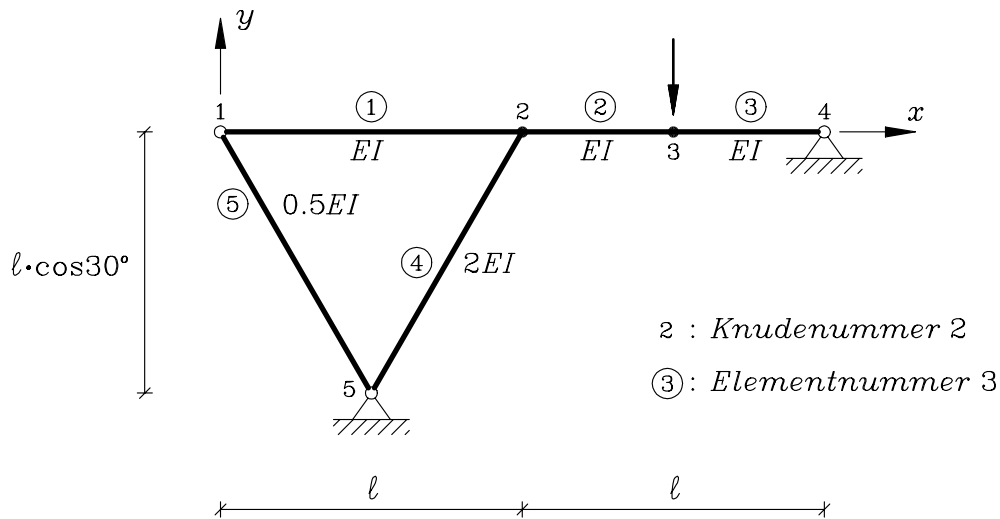


Fig. 2.10: Konstruktionseksempel

```

c* EI
c*
rconst, 1, 2, 1, 5, 2.9e-3, 1.8e-5, 0.15;
el, 1, cr, , 2, 1, 2;
el, 2, cr, , 2, 2, 3;
el, 3, cr, , 2, 3, 4;
c*
c* 0.5 EI + charnierer i hver ende
c*
rconst, 1, 3, 1, 5, 2.9e-3, 9.0e-6, 0.1, 000001, 000001;
el, 5, cr, , 2, 1, 5;
c*
c* Understøtninger
c*
dnd, 4, au, 0.0;
dnd, 5, au, 0.0;
c*
c* Belastning
c*
fnd, 3, fy, -5.5e3;
c*
c* Analyse
c*
r_static

```

Inddata eller kommandoer til Cosmos kan enten foretages interaktivt eller som her via en fil med inddata. Rækkefølgen er valgfri, idet man dog skal definere en størrelse, før der kan refereres til den. Det vil sige, at knuderne til et element skal være kendt, før

elementet defineres. Knude- og element-kommandoer kan godt blandes, men det anbefales af overskuelighedsgrunde at adskille kommandoerne som vist i eksemplet. Linier der starter med **c** er kommentarer, og har ingen betydning.

Knuderne defineres med ordren **nd** (nodes) efterfulgt af et løbenummer og x - og y -koordinater. Nummeret er valgfrit, og Cosmos optimerer selv ligningsløsningen.

Før den egentlige element-definition skal man definere den ønskede:

- elementtype: **egroup** nummer 1 er plane bjælke elementer, beam2d.
- materialet: **mprop** - material properties - for materiale nummer 1 er Young's modulus ex 2.1e11.
- tværsnit: **rconst** - real constants - for elementgruppe 1 har løbenummer 1. Herefter 2 data til at angive antallet, og endelig areal, inertimoment og dybde af tværsnit (spændingsberegninger).

Herefter defineres de enkelte elementer med **el** (elements) efterfulgt af et løbenummer, geometri-type - **cr** - antal knuder i elementet samt en start- og slutknode. Geometritypen er relevant i forbindelse med skive/plade-elementer, ligesom antallet af knuder per element er forskelligt. I elementdefinitionen anvendes sidste definerede/aktiverede elementtype, materiale og tværsnit. Placeringen af de forskellige **rconst**-kommandoer, har derfor betydning for de efterfølgende definitioner af elementer, **el**. Denne indirekte sammenhæng mellem kommandoer kan give anledning til fejltagelser, og bryder med det relationelle database princip. Internt i Cosmos bruges referencerne, og brugerne kan få lister over sammenhænge.

I element 5 er der indre charnierer i begge ender, hvilket defineres i **rconst** med de 2 data 000001 og 000001. De betyder at momentet om z -aksen er 0. De indre charnierer kunne lige så godt være placeret i element 1 og 4, men det havde krævet ekstra **rconst** definitioner, idet den øverste bjælke principielt ville være lavet af 2 tværsnit. En særskilt definition af indre charnierer ville have undgået denne lidt forvirrende sammenhæng.

Understøtninger defineres med **dnd** (displacement in node). Der angives et knudenummer, den pågældende flytning au (all u's, d.v.s. flytning i x - og y -retning) samt endelig størrelsen af den kendte flytning.

Knudekræfter defineres med **fnd** (force in node). Der angives et knudenummer, en kraft fy (force/kraft i y -retning) samt størrelsen.

Efter inddata-definitionen kan man optegnet konstruktionen med element- og knudenumre, belastninger og understøtninger. Hermed kan man få fjernet eventuelle fejl, før at selve beregningen startes med **r_static** (run static analysis).

Brugeren skal normalt selv sikre, at der regnes i konsistente enheder, dvs. at længder, kræfter, E-moduler mm. opgives i de samme grundenheder f.eks. N og m . Da normaltøjningerne medtages, kan man ikke umiddelbart omregne deformationerne, når man ændre fra et tværsnit til et andet, idet indflydelsen fra bøjnings- og aksialstivheden ikke skaleres ens.

Efter beregningen kan brugeren i en interaktiv dialog få udtegnede deformationsfigurer, reaktioner og plot af snitkræfter og spændinger. Deformationsfigurerne kan bruges til at se om

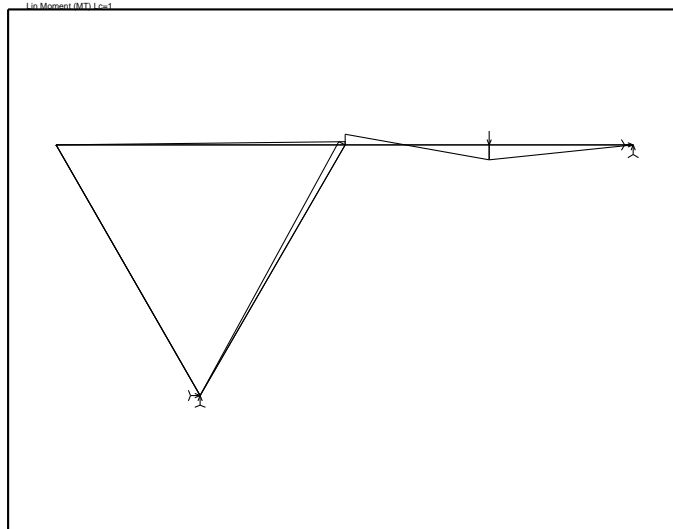


Fig. 2.11: Bøjningsmomenter i konstruktionen

konstruktionen får de forventede udbøjninger. Hvis lasten f.eks. var blevet defineret positiv, ville bjælke 2-3-4 bøje opad. Reaktionskontrol kan benyttes til at sikre sig, at hele lasten er medtaget. Data kan også udskrives på en fil, og overføres til dimensioneringsprogrammer. Figur 2.11 viser et plot af bøjningsmomenterne i konstruktionen.

Kapitel 3

Hensyntagen til lokal elementlast

I dette kapitel vil vi udvide elementmetodeformuleringen til også at omfatte last på elementerne, der i det følgende betegnes lokal eller element last i modsætning til knudelasten fra det forrige kapitel.

Den grundlæggende ide i udledelsen er at omforme elementlasten til et ækvivalent kraftsystem bestående af koncentrerede kræfter i knuderne og en spændingsfordeling i selve elementet. Dette svarer grundlæggende til at bestemme de såkaldte tvangskræfter i deformationsmetoden, idet vi dog her ønsker at finde ækvivalente kraftsystemer og ikke kraftsystemer i ligevægt.

Den trinvis udvikling af elementmetoden, som vi har valgt, vil vise sig tydeligt i dette kapitel. Elementlasten konverteres først til et ækvivalent kraftsystem, hvorefter det løses med metoden fra kapitel 2, og endelig fås den endelige snitkraftfordeling som en sum af 2 bidrag hidrørende fra henholdsvis knudelasten og fra det ækvivalente kraftsystem. Elementmetodens "æskesystem" bliver hermed forhåbentligt tydeligt, idet hensyntagen til lokallast programmeres som en "preprocessor", der konverterer elementlast til knudelast, og en "postprocessor", der modificerer snitkraftfordelingen ud fra elementlasten.

3.1 Elementlastens ækvivalente knudekræfter

Med udgangspunkt i Figur 3.1 ønsker vi, idet vi i første omgang kun betragter et enkelt element, at bestemme et sæt af knudekræfter \mathbf{r} , der er statisk ækvivalent med den lokale last. For at systemet kan være statisk ækvivalent, skal der tilføjes en lokal snitkraftfordeling i elementet betegnet, M_0 , på figuren. Denne lokale snitkraftfordeling kan opfattes som en partikulær løsning til den styrende differentiaalligning for det belastede element.

Den partikulære løsning findes svarende til, at flytningerne i bjælkeenderne er 0, hvilket svarer til fremgangsmåden i deformationsmetoden, hvor knuderne netop blev fastholdt ved bestemmelse af Z_k^0 leddene.

Knudekræfterne kan bestemmes på forskellige måder, og i dette afsnit vil vi opstille en rationel beregningsform, der bygger på formfunktionsbegrebet. Metoden vil vise sig meget enkel i programmeringssammenhæng, og den kan umiddelbart udvides til andre konstruktionstyper.

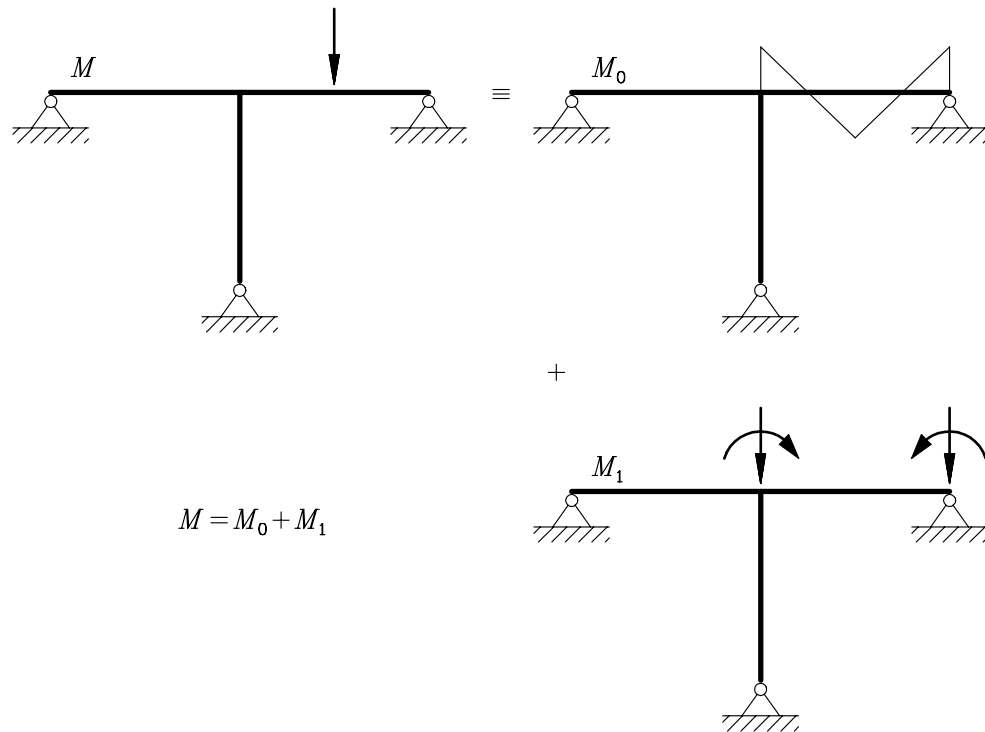


Fig. 3.1: Opdeling af snitkraftbidrag

Bestemmelsen af den partikulære løsning vil vi ikke behandle direkte, idet man med udgangspunkt i knudekræfterne let regner sig frem til den lokale snitkraftfordeling. Ved en konkret edb-implementering er dette dog tidskrævende, og systemerne arbejder derfor med en begrænset variation af belastningsmulighederne.

Da de to systemer vist i Figur 3.1 skal være statisk ækvivalente, skal der per definition gælde, at flytninger og spændinger er identiske. Hermed fås (3.1.1).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

I modsætning til Figur 3.1 benyttes i (3.1.1) den generelle betegnelse for spændingerne, idet metoden også skal kunne behandle lokal aksiallast.

Valget af den partikulære løsning, $\boldsymbol{\sigma}_0$, sikrer, at knudeflytningerne for dette tilfælde er identisk 0, (3.1.2).

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}\tag{3.1.2}$$

I første omgang vil vi kun behandle belastning i form af enten aksial- eller tværlast, og denne kan både være koncentreret eller fordelt. Metoden kan nemt generaliseres til også

at omfatte momentbelastning, men da formlerne bliver noget mere omstændelige, er dette udeladt i første omgang.

Belastningen på et element samles i en vektor, \mathbf{p} , svarende til flytningerne, \mathbf{u} , som vist i (3.1.3).

$$\mathbf{p}(x) = \begin{Bmatrix} p_u(x) \\ p_w(x) \end{Bmatrix} \quad (3.1.3)$$

hvor $p_u(x)$ og $p_w(x)$ angiver variationen langs elementet af henholdsvis aksial- og tværlast. For at bestemme knudekræfterne, \mathbf{r} , benyttes Virtuelt Arbejdes Princip på de to ækvivalente systemer. De virtuelle flytninger vælges svarende til de globale knudeflytningerne, $\delta\mathbf{V}$.

Først betragtes systemet med fordelt last, og vi beregner det indre og ydre virtuelle arbejde, som vist i (3.1.4) og (3.1.5). Som tidligere nævnt betragter vi kun et system, der er belastet lokalt i et enkelt element, og vi vil så senere generalisere til belastning på flere elementer.

$$A_{Indre} = \int_{konstruktion} \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\epsilon} dV \quad (3.1.4)$$

$$A_{Ydre} = \int_{element} \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u} dV \quad (3.1.5)$$

I (3.1.5) indføres flytningsinterpolationsmatricen, \mathbf{N} , og herved kan det ydre virtuelle arbejde skrives som (3.1.6).

$$A_{Ydre} = \delta\mathbf{v}^T \int_{element} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV \quad (3.1.6)$$

Hermed er det ydre arbejde udtrykt gennem de virtuelle knudeflytninger, og i (3.1.6) angiver, $\delta\mathbf{v}$, de virtuelle flytninger målt i det lokale koordinatsystem. Der er igennem den topologiske beskrivelse af elementet en direkte sammenhæng mellem de lokale virtuelle flytninger og de globale virtuelle flytninger, jvf afsnit 2.5 eller det følgende afsnit.

Herefter udnyttes, at spændingerne kan skrives som en sum af 2 bidrag, (3.1.1), og det indre virtuelle arbejde omskrives til (3.1.7), idet vi samtidig udnytter, at der per definition gælder $\int_{konstruktion} \boldsymbol{\sigma}_0^T \delta\boldsymbol{\epsilon} dV = 0$. Betingelsen på $\boldsymbol{\sigma}_0$ svarer til at forlange, at den ikke giver resulterende flytninger i endepunkterne, og dette var netop kravet til den partikulære løsning, $\boldsymbol{\sigma}_0$.

$$\begin{aligned} A_{Indre} &= \int_{konstruktion} \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\epsilon} dV \\ &= \int_{konstruktion} \boldsymbol{\sigma}_0^T \delta\boldsymbol{\epsilon} dV + \int_{konstruktion} \boldsymbol{\sigma}_1^T \delta\boldsymbol{\epsilon} dV \\ &= \int_{konstruktion} \boldsymbol{\sigma}_1^T \delta\boldsymbol{\epsilon} dV \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Herefter betragtes delsystemet påvirket alene med de ækvivalente knudekræfter. Det indre virtuelle arbejde fås som (3.1.8).

$$A_{Indre} = \int_{konstruktion} \boldsymbol{\sigma}_1^T \delta \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (3.1.8)$$

Det ydre virtuelle arbejde fås direkte som knudekræfterne multipliceret med de tilsvarende virtuelle flytninger, (3.1.9).

$$A_{Ydre} = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{r} \quad (3.1.9)$$

Som i (3.1.6) er de virtuelle flytninger udtrykt i det lokale elementkoordinatsystem.

Ved at sammenstille udtrykkene for de 2 forskellige systemer ses, at det indre virtuelle arbejde er ens for dem begge, og det medfører direkte, at de ydre virtuelle arbejder også er ens. Hermed fås umiddelbart (3.1.10), der udtrykker de ækvivalente knudekræfter udfra den lokale last, \mathbf{p} , og flytningsinterpolationsmatricen, \mathbf{N} . Hermed har vi opnået det ønskede, nemlig at opstille en rationel beregningsmetode for de ækvivalente knudekræfter.

$$\mathbf{r} = \int_{element} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV \quad (3.1.10)$$

Hensyntagen til fordelt momentbelastning følger den samme fremgangsmåde, men da momentet laver arbejde igennem drejningen, skal \mathbf{u} erstattes med θ . Formlen for knudekræfterne svarer dermed til (3.1.10), idet \mathbf{N} erstattes med en matrix, der interpolerer drejningen langs elementet.

3.2 Opstilling af systemligninger

I forrige afsnit blev der udledt en formel til bestemmelse af de ækvivalente knudekræfter, og vi vil herefter undersøge, hvordan systemflytningerne beregnes udfra den ækvivalente knudekraft.

Belastningen på systemet kan opdeles i en global knudelast og en global elementlast, (3.2.1).

$$\mathbf{R}^{Total} = \mathbf{R}^{Knudelast} + \mathbf{R}^{Elementlast} \quad (3.2.1)$$

Den globale elementlastvektor fremkommer som en sum over alle elementer med lokal last. Udfra formel (3.1.10) beregnes bidraget for det i 'te element, og resultatet er givet i det lokale elementkoordinatsystem. Med de transformationsregler vi opstillede i afsnit 2.4, udtrykkes herefter den lokale elementlast for element i i det globale system, som vist i (3.2.2).

$$\mathbf{r}_i^{globalsystem} = \mathbf{T}_{elem}^{-1} \mathbf{r}_i^{elementsystem} \quad (3.2.2)$$

Efter at de enkelte lastbidrag er udtrykt i det globale system, skal de samles i den globale lastvektor svarende til fremgangsmåden i afsnit 2.5. Rent formelt kan summationen af lastbidragene skrives som vist i (3.2.3).

$$\mathbf{R}^{Elementlast} = \sum_{i=1}^{nlast} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{r}_i^{globalsystem} \quad (3.2.3)$$

hvor \mathbf{A}^i udtrykker den topologiske sammenhæng mellem element i og systemet, (2.5.5). Summationen foretages over det antal elementer med lokal last, $nlast$. Formlen skal kun opfattes formelt, og i en konkret edb-implementering udlægges bidragene fra den lokale last i den globale lastvektor ved en simpel rutine, der afhænger direkte af elementets start- og slutknode.

Efter at belastningsvektoren er opstillet løses systemet på sædvanlig måde, og i efterfølgende afsnit vil vi se, hvorledes snitkraftfordelingen bestemmes.

3.3 Tolkning af beregningsresultater

Efter at systemflytningerne, \mathbf{V} , er bestemt, skal de enkelte elementers spændingsfordeling beregnes. Indledningsvis skal elementets lokale flytninger bestemmes ud fra de globale flytninger, og herefter skal de transformeres over i det lokale elementkoordinatsystem, idet alle spændings- og tøjningsudtryk er bestemt i dette system. Ud fra forrige afsnit fås umiddelbart udtrykket for element i 's flytningsovertallige i det lokale elementsystem som (3.3.1).

$$\mathbf{v}_i^{Elementsystem} = \mathbf{T}_{elem}(\mathbf{A}^i \mathbf{V}) \quad (3.3.1)$$

Efter at de lokale flytningsovertallige er bestemt, beregnes snitkræfterne ud fra spændings/tøjningsrelationen, der er udtrykt i (3.3.2).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DB} \mathbf{v}_i^{Elementsystem} \quad (3.3.2)$$

I elementer med lokal elementlast skal man yderligere addere snitkraftfordelingen, $\boldsymbol{\sigma}_0$, som vist i (3.3.3).

$$\boldsymbol{\sigma}_{Total} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3.3.3)$$

Den lokale spændingsfordeling kan variere vilkårligt, hvorimod spændingsbidraget fra de globale knudeflytninger vil variere lineært indenfor det enkelte element.

Fordelingen af den lokale elementlast kan kun mærkes i det pågældende element, medens systemets øvrige opførsel kun styres af de ækvivalente knudekræfter. Dette resultat kendes også fra den sædvanlige deformationsmetode.

Udbøjningsformen for elementer med lokal last skal som spændingerne også modificeres for flytninger fra den lokale last. Dette foretages normalt ikke i færdige systemer, idet virkningen som regel er lille, da udbøjningsbidraget er 0 i knuderne. Rent principielt gælder der dog (3.3.4).

$$\mathbf{u}_{total} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_0 \tag{3.3.4}$$

hvor vi i (3.3.4) har anvendt \mathbf{u} for at betegne flytningen langs elementet. Bidraget \mathbf{u} varierer som et 3'grads polynomium, som vi har set i afsnit 2.2, medens variationen af \mathbf{u}_0 afhænger helt af den konkrete lokale belastning, og den behøver end ikke variere som et generelt polynomium.

3.4 Anvendelse af færdige systemer

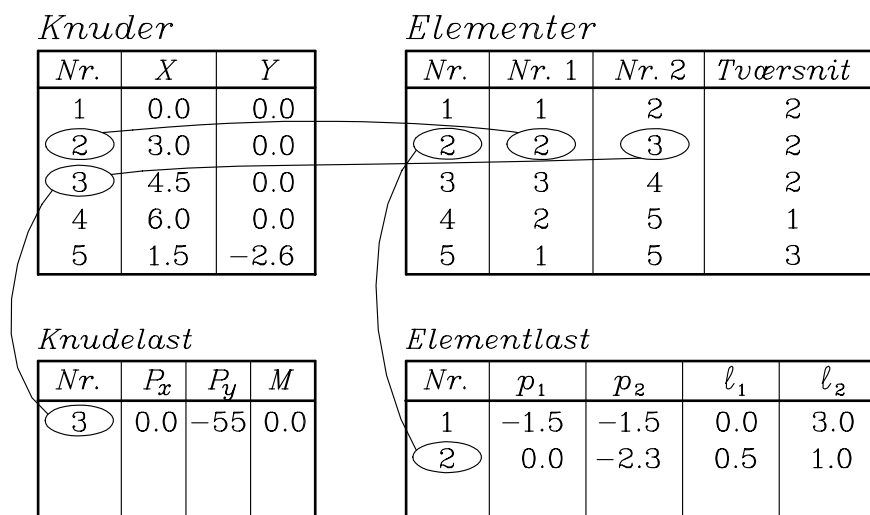


Fig. 3.2: Sammenhæng mellem inddata-blokke(relationel struktur)

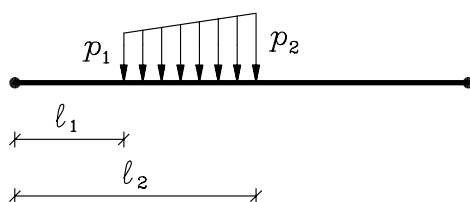


Fig. 3.3: Fordelt last på element

I Figur 3.2 er der givet en sammenhæng mellem belastning i form af knude- og elementlast og elementer og knuder. Som nævnt i afsnit 2.7 kan alle data enten opfattes element- eller knuderrelaterede, og dette fremgår også for de 2 typer belastninger.

I Figur 3.2 antages elementbelastningen at bestå af en fordelt last på elementet som vist i Figur 3.3. I praksis vil den lokale last kunne defineres på forskellige måder, men dette ville komplicere Figur 3.2 unødigt.

Den lokale last vil normalt bestå af enten koncentrerede kræfter eller fordelte laste, og normalt ikke momentbelastninger. De fleste systemer tillader, at et element belastes med flere lokale belastninger, hvorved man udfra relativt enkle standardtilfælde kan opbygge komplekse belastninger.

Den lokale last defineres mest naturligt i forhold til det lokale elementsystem, men nogle systemer tillader at belastningen defineres i globale retninger, hvorefter systemet selv foretager de nødvendige transformationer.

Egenvægt er et eksempel på en fordelt last virkende efter globale retninger, og de fleste systemer kan automatisk generere egenvægtsbidraget.

Uddata fra programmerne vil indeholde snitkræfterne i udvalgte punkter langs elementet, og brugeren kan normalt selv vælge antal og placering. De færreste systemer finder maksimumsværdier, idet dette kræver ganske omfattende beregninger. Elementlasten kan bestå af et stort antal delbidrag, og det umuliggør en analytisk bestemmelse af maksimumsværdien. Som tidligere nævnt bliver udbøjningerne normalt ikke korrigeret for den lokale belastning.

Kapitel 4

Elementmetoden som tilnærmelsesmetode

I dette afsnit vil vi beskæftige os med en meget væsentligt egenskab ved elementmetoden nemlig muligheden for at opstille tilnærmede løsninger.

For lineære statiske bjælkeberegninger er tilnærmelsesprincippet normalt ikke så afgørende, men for skive-, plade- og skal-eksempler er det helt essentielt. Gennemgangen vil tage udgangspunkt i et konkret eksempel, der ikke kan løses eksakt med den stivhedsmatrix, som er opstillet i de tidligere afsnit. Vi gennemgår forskellige muligheder, og viser herigennem elementmetodens muligheder for på enkel vis at tage hensyn til fænomener, der ellers kræver en mere detaljeret analytisk løsning.

Tilnærmelsesprincippet bliver behandlet senere i afsnittet om stabilitetsberegninger, og her er det af væsentlig betydning for at kunne opstille hensigtsmæssige beregningsmetoder.

4.1 Bjælke med varierende inertimoment - analytisk løsning

Vi betragter en indspændt bjælke med ikke-konstant inertimoment, som er påvirket af en enkeltkraft, P , i den fri ende, se Figur 4.1.

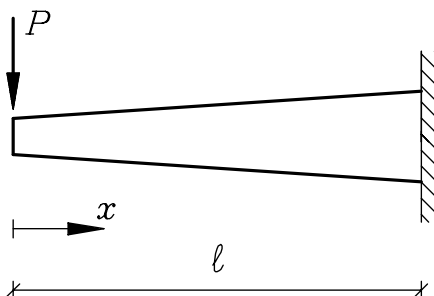


Fig. 4.1: Indspændt bjælke med varierende inertimoment

Inertmomentet antages at variere lineært som vist i (4.1.1).

$$I = I_0(1 + kx) \quad (4.1.1)$$

hvor $k > -\frac{1}{l}$.

For at kunne sammenligne forskellige alternative metoders nøjagtighed vil vi i første omgang løse ovenstående problem eksakt (analytisk).

Ud fra ligevægtsligningerne ser man umiddelbart, at momentet i bjælken varierer lineært som vist i (4.1.2).

$$M(x) = -Px \quad (4.1.2)$$

Bjælkens styrende differentialligning blev defineret i (2.2.1), og er gentaget i (4.1.3). I dette tilfælde vil I afhænge af x .

$$\frac{M}{EI(x)} = -w_{,xx} \quad (4.1.3)$$

Løsningen af differentialligningen foregår ved direkte integration, og udnyttelse af randbetingelserne i den indspændte del. I løsningen tages der ikke forbehold for tilfældet $k = 0$, som svarer til konstant tværsnit. Ved rækkeudvikling af udtrykkene kan man nemt - men dog med en del beregninger - vise, at formeludtrykkene svarer til udtrykkene med konstant tværsnit. En vigtig pointe er dog, at man ikke kan udføre grænseovergangen "numerisk" ved at indsætte tilpas små værdier af k . Årsagen er, at beregningen vil involvere differenser mellem store tal, og p.gr.a. den begrænsede regnenøjagtighed vil denne forskel dermed blive meget usikkert bestemt. Dette forhold vil blive diskuteret lidt nærmere i afsnit 4.5.

Drejningen, $\theta = -w_{,x}$ findes som vist i (4.1.4).

$$\begin{aligned} \theta(x) &= - \int_0^x \frac{Px}{EI_0(1 + kx)} dx \\ &= - \frac{P}{EI_0} \int_0^x \frac{x}{1 + kx} dx \\ &= - \frac{P}{EI_0} \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2} \ln(1 + kx) + A \right) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Idet $\theta(l) = 0$, kan den arbitrære konstant, A umiddelbart bestemmes, (4.1.5).

$$A = - \frac{P}{EI_0} \left(\frac{l}{k} - \frac{1}{k^2} \ln(1 + kl) \right) \quad (4.1.5)$$

og dermed kan θ skrives som (4.1.6).

$$\theta(x) = -\frac{P}{EI_0} \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2} \ln(1+kx) - \frac{l}{k} - \frac{1}{k^2} \ln(1+kl) \right) \quad (4.1.6)$$

Drejningen i den frie ende er vist i (4.1.7).

$$\theta(0) = -\frac{Pl^2}{EI_0} \left(\frac{1}{kl} - \frac{1}{(kl)^2} \ln(1+kl) \right) \quad (4.1.7)$$

Ved rækkeudvikling af (4.1.7) kan man vise, at for $k \rightarrow 0$ findes drejningen, (4.1.8). Dette resultat svarer til det velkendte udtryk for en indspændt bjælke med konstant tværsnit påvirket af en kraft, P , i den frie ende.

$$\theta(0) = -\frac{1}{2} \frac{Pl^2}{EI_0} \quad (4.1.8)$$

Yderligere integration af θ giver flytningen w , som vist i (4.1.9).

$$w(x) = \frac{P}{EI_0} \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{k} - \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{k} (1+kx) \ln(1+kx) - x \right) - \frac{l}{k} x + \frac{1}{k^2} \ln(1+kl)x + B \right) \quad (4.1.9)$$

Idet $w(l) = 0$ kan den arbitrære konstant, B , bestemmes, og w kan skrives som (4.1.10).

$$w(x) = \frac{P}{EI_0} \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{k} - \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{k} (1+kx) \ln(1+kx) - x \right) - \frac{l}{k} x + \frac{1}{k^2} \ln(1+kl)x + \frac{1}{2} \frac{l^2}{k} - \frac{l}{k^2} + \frac{1}{k^3} \ln(1+kl) \right) \quad (4.1.10)$$

Flytningen i den frie ende er vist i (4.1.11).

$$w(0) = \frac{Pl^3}{EI_0} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{kl} - \frac{1}{(kl)^2} + \frac{1}{(kl)^3} \ln(1+kl) \right) \quad (4.1.11)$$

Ved rækkeudvikling af (4.1.11) kan man vise, at for $k \rightarrow 0$ findes flytningen, (4.1.12). Som før svarer dette til det velkendte udtryk for en indspændt bjælke med konstant tværsnit påvirket af en kraft, P , i den frie ende.

$$w(0) = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI_0} \quad (4.1.12)$$

Igennem (4.1.7) og (4.1.11) er der opstillet formeludtryk for drejning og flytning i den frie ende, som kan bruges som sammenligningsgrundlag ved gennemgang af de 3 principielt forskellige beregningsmetoder, der gennemgås i det følgende.

4.2 Beregningsmetoder - bjælker med konstant tværsnit

Den mest enkle måde at løse problemet på består i at opbygge bjælken af et antal bjælkestykker med konstante tværsnitskonstanter. Ved denne tilnærmelse - eller diskretisering - begås en fejl, der kan minimeres ved at bruge et større antal elementer. I Figur 4.2 er der vist en elementinddeling med 4 elementer, og tværsnitskonstanterne er bestemt som middelværdien af de tilsvarende konstanter i start- og slutknode for den virkelige bjælke.

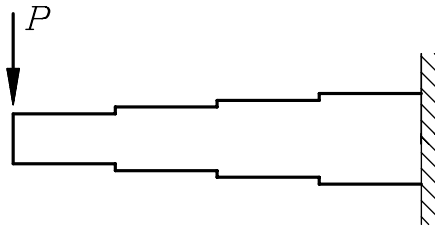


Fig. 4.2: Ikke-konstant tværsnit opbygget af 4 konstante elementer

For at få et indtryk af fejlen ved tilnærmelsen er der i Tabel 4.1 opstillet resultater for forskellige elementinddelinger.

Som det fremgår af tabellen skal der anvendes et relativt stort antal elementer for at få en acceptabel nøjagtighed. Fordelen ved metoden er, at der ikke kræves et særligt element, men til gengæld skal man inddele konstruktionen mere detaljeret, og dette giver både flere ind- og uddata samt en længere beregningstid.

Antal Elementer	% Afvigelse	
	w	θ
1	30.30	10.29
2	8.58	5.04
3	3.92	2.99
4	2.22	1.97
6	0.98	1.02
8	0.55	0.62
12	0.24	0.30
16	0.14	0.17

Tabel 4.1: Elementantallets indflydelse på beregningsnøjagtigheden

4.3 Tilnærmede formfunktioner

Ved anvendelsen af elementer med konstante tværsnitskonstanter får det enkelte elements start- og slutknode tildelt samme stivhedsegenskaber, selvom dette er i åbenlys modstrid med virkeligheden. F.eks. er modstanden mod drejning størst for den knude med det største

inertimoment. En umiddelbar forbedring af metoden består i at foretage en egentlig integration af stivhedsmatricen ud fra formel (2.3.8), der er gentaget nedenfor af overskueligheds grunde.

$$\mathbf{k} = \int_{element} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (4.3.1)$$

I (4.3.1) betegner \mathbf{B} tøjningsfordelingsmatricen, og i dette afsnit tilnærmes \mathbf{B} til de tilsvarende tøjningsfordelingsudtryk for elementer med konstante tværsnit. Denne fremgangsmåde betegnes at anvende *Tilnærmede Formfunktioner*.

Anvendelse af tilnærmede formfunktioner medfører, at ligevægtsligningerne ikke opfyldes eksakt, og vi kan derfor ikke forvente en korrekt repræsentation af flytninger, tøjninger og snitkræfter. Vi kan f.eks. betragte udtrykkene for flytning og drejning for eksemplet med den indspændte bjælke påvirket af en enkeltkraft, (4.1.6) og (4.1.10). I formlerne optræder logaritmiske udtryk, og det kan ikke svare til 3'grads polynomier, som var flytningsudtrykket for bjælker med konstant tykkelse.

Modsætningen til *Tilnærmede Flytningsfunktioner* er *Eksakte Formfunktioner*, og i det efterfølgende afsnit vil vi undersøge, hvorledes disse kan anvendes, og hvilke komplikationer det medfører.

I det følgende vil vi kun betragte bøjningsstivheden, og ved integration af stivhedselementerne fås (4.3.2). Startknuden af elementet er placeret i $x = 0$ og slutknuden i $x = l$.

$$\mathbf{k}_{Bøjning} = \frac{EI_0}{l} \begin{bmatrix} 12\frac{1}{l^2}C_{11} & 6\frac{1}{l}C_{12} & -12\frac{1}{l^2}C_{11} & 6\frac{1}{l}C_{41} \\ 6\frac{1}{l}C_{12} & 4C_{22} & -6\frac{1}{l}C_{12} & 2C_{24} \\ -12\frac{1}{l^2}C_{11} & -6\frac{1}{l}C_{12} & 12\frac{1}{l^2}C_{11} & -6\frac{1}{l}C_{14} \\ 6\frac{1}{l}C_{14} & 2C_{24} & -6\frac{1}{l}C_{14} & 4C_{44} \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

hvor faktorerne $C_{11} - C_{44}$ er givet ved (4.3.3).

$$\begin{aligned} C_{11} &= 1 + \frac{1}{2}kl \\ C_{12} &= 1 + \frac{1}{3}kl \\ C_{22} &= 1 + \frac{1}{4}kl \\ C_{14} &= 1 + \frac{2}{3}kl \\ C_{24} &= 1 + \frac{1}{2}kl \\ C_{44} &= 1 + \frac{3}{4}kl \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

I dette tilfælde er det relativt enkelt at udføre integrationen analytisk, og hvis tværsnitskonstanterne varierer mere kompliceret, anvendes numerisk integration typisk i form af

Gauss integration. I edb-programmer anvender man stort set altid numerisk integration, idet det både er hurtigere i regnetid og mindre pladskrævende. Gauss-integration kan ved passende høj integrationsorden gøres eksakt for polynomier (under hensyntagen til den endelige regnenøjagtighed).

Nedenfor er i Tabel 4.2 angivet resultaterne for tilspidsede elementer, og for sammenligningens skyld er medtaget resultaterne fra det forrige afsnit.

	Konstante elementer		Tilspidsede elementer	
Antal	% Afvigelse		% Afvigelse	
Elementer	w	θ	w	θ
1	30.30	10.29	-0.62	2.82
2	8.58	5.04	-0.17	0.77

Tabel 4.2: Elementantallets indflydelse på beregningsnøjagtigheden

Af tabellen fremgår, at der er en klar forbedring af resultaterne sammenlignet med elementer med konstante tværsnit. Fordelen ved de tilspidsede elementer er, at der ikke kræves en kompliceret udledning, og at det er nemt at etablere i et edb-program. Sammenligningen er foretaget på flytninger, men i næste afsnit vil vi sammenligne snitkræfterne, som er mere væsentlige i en dimensionering.

4.4 Eksakte formfunktioner

I dette afsnit vil vi bestemme de korrekte eller eksakte udtryk for flytningsinterpolationen. Da beregningsomfanget er ganske stort, vil vi kun betragte formfunktioner svarende til flytningerne i den frie ende. Herved får vi mulighed for at beregne det oprindelige eksempel, men til gengæld er det ikke muligt at opstille alle elementerne i stivhedsmatricen.

Af overskueligheds grunde opstilles de styrende ligninger nedenfor, selvom de kan findes i tidligere afsnit.

Den styrende differentialligning er givet ved (4.4.1).

$$\frac{M}{EI(x)} = -w_{,xx} \quad (4.4.1)$$

hvor EI er givet ved (4.4.2).

$$EI = EI_0(1 + kx) \quad (4.4.2)$$

hvor $k > -\frac{1}{l}$.

Momentet i elementet vil variere lineært, idet vi kun forudsætter last i knuderne. Dette medfører, at forskydningskraften er konstant, og dermed at momentet er lineært varierende, som vist i (4.4.3).

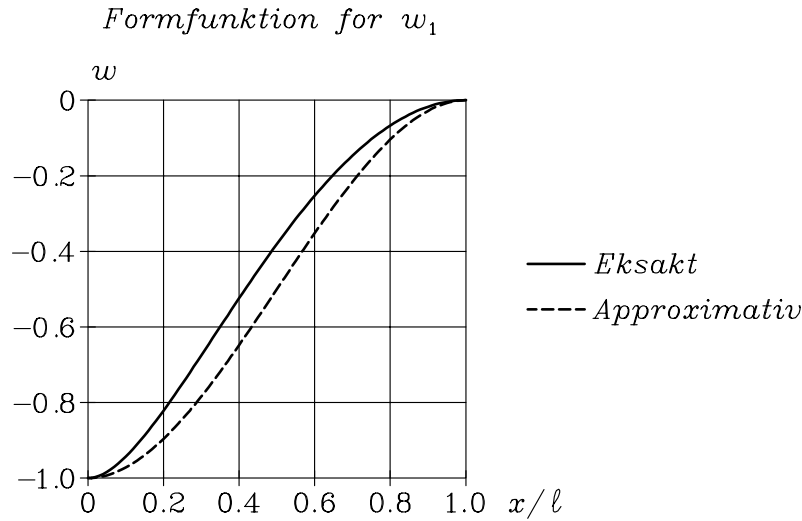


Fig. 4.3: Formfunktioner for flytning w_1

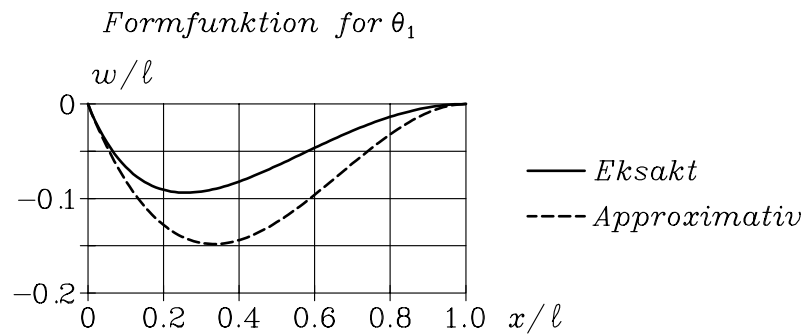


Fig. 4.4: Formfunktioner for drejning θ_1

$$M(x) = m_0 + m_1x \tag{4.4.3}$$

Integration af den styrende differentialligning bestemmer det principielle udseende af w . Formen er angivet i (4.4.4), og vi vælger at bibeholde denne form a.h.t. senere rækkeudviklinger.

$$w(x) = \frac{1}{2} \frac{a}{k} x^2 + \left(-\frac{a}{k} + b\right) \frac{1 + kx}{k^2} \ln(1 + kx) - \left(-\frac{a}{k} + b\right) \frac{x}{k} + cx + d \tag{4.4.4}$$

hvor a, b, c og d er arbitrære konstanter, der findes ud fra randbetingelserne.

Ud fra den principielle sammenhæng i (4.4.4) kan formfunktionerne for de flytningsoverfaldige i knuderne bestemmes. Beregningerne er relativt omfattende, og funktionssammen-

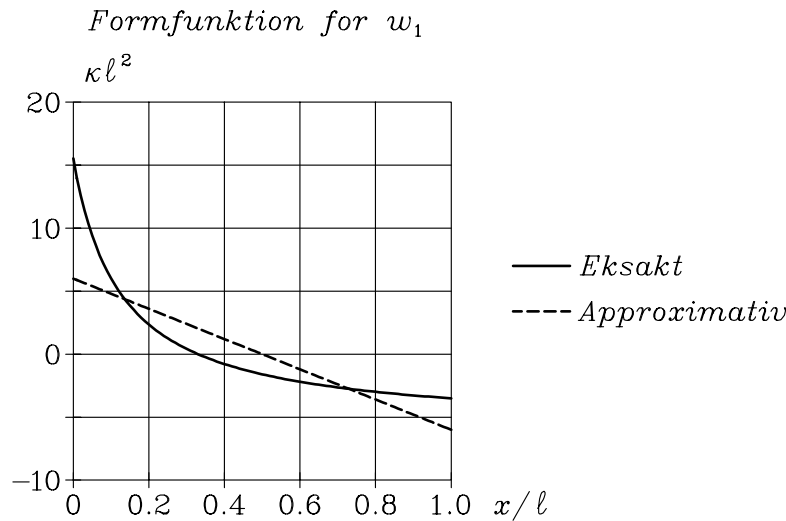


Fig. 4.5: Interpolation af κ fra w_1

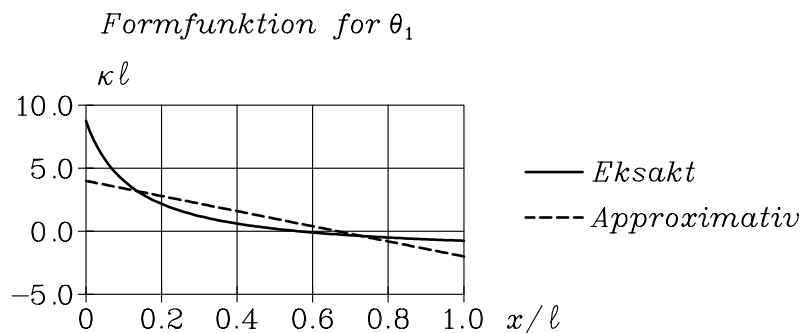


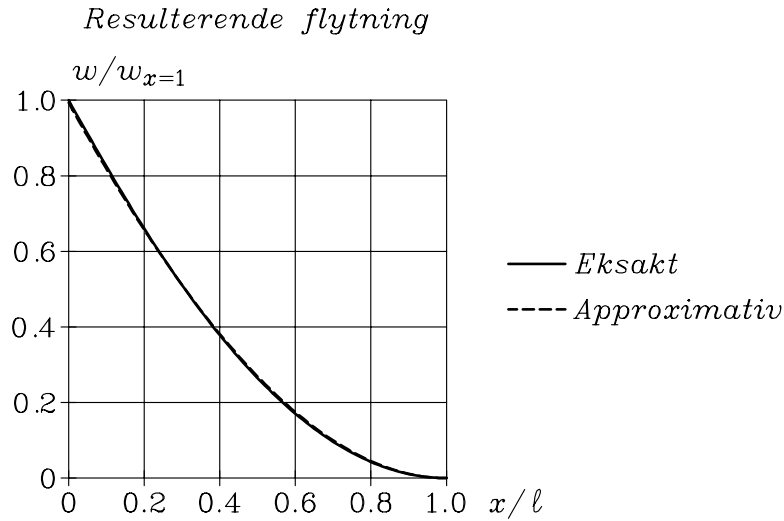
Fig. 4.6: Interpolation af κ fra θ_1

hængen kompliceret med logaritmiske udtryk. I denne sammenhæng er det konkrete formeludtryk mindre væsentligt, og vi har derfor blot optegnet formfunktionerne for henholdsvis flytning og drejning i Figur 4.3 og 4.4. Figurerne indeholder for sammenligningens skyld de tilsvarende tilnærmede formfunktioner, og kurverne er bestemt for $kl = 8$, d.v.s. en ret stor tilspidsning. Elementets knuder er placeret således, at det mindste tværsnit er placeret i den frie ende. Ved rækkeudvikling af formfunktionerne kan man vise, at de for $k \rightarrow 0$ går over i de tilsvarende polynomiale udtryk. Dette kræver noget regnearbejde.

Figurerne viser, at der specielt for den drejningsovertallige, θ , er ret stor forskel mellem de tilnærmede og eksakte formfunktioner.

På basis af flytningsinterpolationen, der definerer \mathbf{N} -matricen, kan vi opstille udtryk for interpolationen af krumningen ved passende differentiation. Som før vælger vi at optegne kurverne for $kl = 8$, som vist i Figur 4.5 og 4.6.

Sammenligningen med de tilnærmede tøjningsinterpolationsfunktioner viser en endnu større afvigelse end for flytningsinterpolationen. Dette er ventet, idet tøjningerne fås som de anden afledede af flytningerne (med modsat fortegn). En funktionstilpasning vil altid give



det bedste resultat for den primære variabel, og tilnærmelsen bliver dårligere for de højere afledede.

Ud fra \mathbf{B} -matricen kan man bestemme \mathbf{k} -matricen, og dette kan med noget regnearbejde gøres analytisk. I denne sammenhæng ønsker vi kun at beregne det konkrete eksempel, og vi kan derfor nøjes med at beregne den øverste, venstre fjerdedel af matricen, som vist i (4.4.5).

$$\mathbf{k}_{\text{Reduceret}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4.5)$$

Vi vil som før af pladshensyn ikke vise de analytiske udtryk for \mathbf{k} -matricen, men udregne den for konkrete værdier af k og l , som vist i (4.4.6). Af hensyn til sammenligningen er det tilsvarende udtryk for \mathbf{k} udregnet ud fra de tilnærmede formfunktioner, (4.4.7).

$$\mathbf{k}_{\text{Eksakt}} = EI_0 \begin{bmatrix} 47.09 & 15.55 \\ 15.55 & 8.77 \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

$$\mathbf{k}_{\text{Tilnærmet}} = EI_0 \begin{bmatrix} 60 & 22 \\ 22 & 12 \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

I formlerne er anvendt $kl = 8$ og $l = 1$.

En sammenligning af stivhedsmatricerne viser store forskelle, og man ville umiddelbart forvente en tilsvarende forskel i deformationerne. Udregning af ligningssystemet giver imidlertid en meget bedre overensstemmelse, som vi allerede viste i forrige afsnit. Den eksakte stivhedsmatrix giver indenfor regnenøjagtigheden det korrekte svar som er bestemt i afsnit

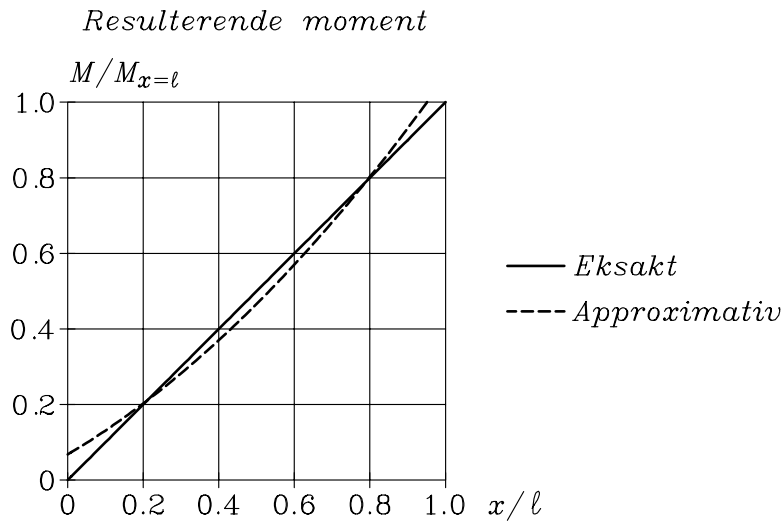


Fig. 4.8: Resulterende momenter

4.1. I Figur 4.7 er flytningerne langs elementet optegnet for de 2 beregningsmetoder, og afvigelsen er for alle praktiske formål ligegyldig.

Anvendelsen af tilnærmede formfunktioner er central for elementmetoden ved andre konstruktionstyper som skiver, plader eller skaller. Beregningsresultaternes ufølsomhed overfor formfunktionerne er grundlæggende for elementmetodens store udbredelse, og ved at basere udledelsen på arbejdsprincipper sikres, at systemet i middel opfylder ligevægtsligningerne.

I Figur 4.8 er momentfordelingen for de 2 fremgangsmåder optegnet, og som ventet giver den eksakte metode den korrekte lineære sammenhæng, medens den tilnærmede er noget dårligere. Dette er forventeligt, idet krumningerne er bestemt som de anden afledede, og derfor er dårligere bestemt. Den tilnærmede metode opfylder kun i middel de statiske betingelser, og dette betyder, at der i den frie ende optræder et moment, som af statiske grunde er forkert. På Figur 4.8 er momentet for den tilnærmede metode korrekt i 2 punkter, som netop svarer til integrationspunkterne for Gauss-integration af orden 2. Dette forhold er af mere generel karakter, og ved skive- eller plade-problemer vil man ofte få spændingerne beregnet i Gauss-punkterne, idet disse forventes at være mere nøjagtige. Alternativt kan man interpolere spændingsfordelingen ud fra Gauss-punkterne alene, og dermed få værdierne på randen.

Fordelene ved at anvende eksakte formfunktioner er først og fremmest, at resultaterne bliver korrekte, og dernæst at man ikke behøver at underinddele elementer, og kan nøjes med såkaldte "naturlige" elementer. Ulemperne er først og fremmest de meget omfattende algebraiske beregninger, og den manglende generalitet, idet man ikke for alle tilfælde kan løse de indgående differentiaalligninger eksakt. En tredje ulempe er de numeriske problemer, der kan opstå i elementer, hvor f.eks. tværsnittsvariationen er meget lille. I overgangszonerne må man programmere alternative rækkeudviklinger af matricerne, hvilket øger programmeringsarbejdet betydeligt. Som en sidste ulempe kan man påpege, at beregningerne vil tage et meget voldsomt omfang, hvis lokallast på elementet skal medtages.

4.5 Konklusion

I de forrige afsnit er der undersøgt 3 alternativer ved beregning af elementer, hvor tværsnit-skonstanterne varierer. På basis af dette kan man udtrække nogle generelle konklusioner, som dels dækker elementmetoden mere generelt, og dels vedrører valget mellem eksakte og tilnærmede formfunktioner.

- Tilnærmede Formfunktioner
 - Flytninger bestemmes meget nøjagtigt.
 - Spændingerne, der fås som afledede funktioner af flytningerne, bestemmes relativt dårligere.
 - Spændingerne er normalt bedst bestemt i Gauss-punkterne.
 - Nemt at programmere i tilspidsede elementer, idet man i integrationen af stivhedsmatricen blot skal medtage variationen af \mathbf{D} -matricen.

- Eksakte Formfunktioner
 - Kræver et ret stort analytisk arbejde.
 - Formeludtrykket kan afhænge af snitkraftfordelingen (fremgår af næste kapitel), hvorved der formuleres et iterativt problem.
 - Begrænset generalitet.
 - Opnår de korrekte svar, men der kan opstå numeriske problemer i grænseovergange.
 - Ingen underinddeling af "naturlige"elementer.

Valget mellem eksakte og tilnærmede formfunktioner er ikke entydigt, men i det følgende vil vi udelukkende anvende de tilnærmede udtryk, idet disse har en mere generel karakter. Til gengæld for dette valg må vi acceptere, at elementinddelingen vil have indflydelse på nøjagtigheden af løsningen.

Kapitel 5

Stabilitet af rammesystemer

I dette afsnit vil vi opstille en beregningsmetode til bestemmelse af stabilitetssvigt af plane rammesystemer. Metoderne kan nemt generaliseres til rumlige rammer, men der bliver hermed ikke umiddelbart taget hensyn til kipningsfænomenet, der giver en udknækning bestående af en kombination af bøjning og vridning af bjælkeelementerne. Kipningsstabilitet afhænger yderligere af lastens angrebspunkt i tværsnittet, og kommercielle programmer kan normalt ikke håndtere kipning.

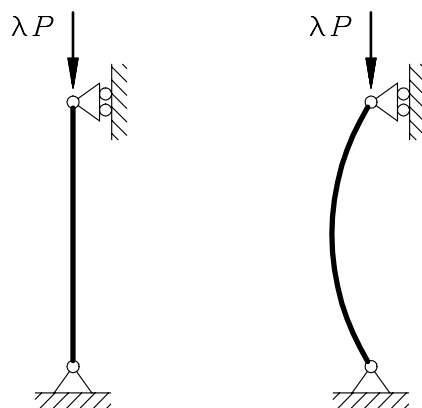


Fig. 5.1: Stabilitetssvigt af søjle

Udgangspunktet for beregningsmetoden er, at der som vist i Figur 5.1 eksisterer et lastniveau, λ , for hvilket, der eksisterer mere end én ligevægtstilstand. Ved at anvende Virtuelt Arbejdes Princip i de to ligevægtstilstande opstilles ligninger til at bestemme det lastniveau, hvor stabilitetssvigtet kan forekomme, og den tilhørende form på tillægsudbøjningerne, der betegnes svigtformen eller buleformen.

Elementmetodeligningerne resulterer i et *lineært egenverdiproblem*, og i praktiske konstruktionsberegninger ønsker vi at bestemme den laveste egenverdi (eventuelt de laveste). Egenverdiproblemer karakteriserer generelt stabilitetsproblemer, som findes indenfor andre fagområder som reguleringsteknik og elektriske kredsløb. Konstruktioners egenfrekvenser kan også beregnes som et lineært egenverdiproblem.

5.1 Stabilitetssvigt

Stabilitetssvigt af konstruktioner kan ske på to principielt forskellige måder, idet konstruktionen enten har nået en maksimal bæreevne eller undergår en markant ændring i ud-bøjningsform. Det første fænomen kaldes *Grænseelastinstabilitet* eller *Limit Load Buckling*, medens det andet betegnes *Forgreningsinstabilitet* eller *Bifurcation Buckling*. (Buckling oversættes for en bygningsingeniør normalt til stabilitet(ssvigt) eller for en maskiningeniør til buling, og bifurcation betyder forgrening).

Rammekonstruktioners stabilitetsopførsel vil normalt være karakteriseret ved Bifurcation Buckling, og vi vil derfor i det følgende udelukkende behandle dette. Konstruktioner, der karakteriseres ved Limit Load Buckling, har en mere kompliceret ikke-lineær opførsel. Lastoptagelsen i sådanne konstruktioner vil være følsom overfor f.eks. samspillet mellem membrankræfter (normalkraften i en bjælke) og bøjningsmomenter eller konstruktionens flytninger (f.eks. et stangsystem med store flytninger). Beregningsmetoderne til Limit Load Buckling omfatter en total beregning af last/deformationsforløbet, og kræver dermed ret store beregningsomkostninger. I forbindelse med stadigt slankere konstruktioner og øget hensyntagen til ikke lineær samlings- og/eller materialeopførsel må man dog forvente et stigende behov for limit load beregninger af rammekonstruktioner. Bifurcation Buckling

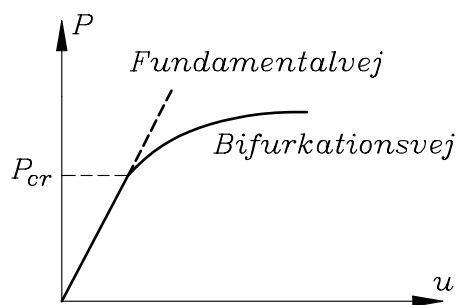


Fig. 5.2: Lineær fundamentalvej

omfatter den såkaldte klassiske stabilitetsteori, der kan bestemme de lastniveauer for hvilke, der er mere end én ligevægtstilstand. Den implicite forudsætning i den klassiske stabilitetsteori er, at konstruktionen indtil stabilitetssvigtet opfører sig lineært, som vist i Figur 5.2. Denne forudsætning er rimelig for rammekonstruktioner, men f.eks. ikke altid indenfor skaller (korte). For den lineære tilstand er der allerede i de forrige kapitler opstillet en elementmetodeløsning, og vi vil for fuldstændighedens gentage formelen her, idet vi betegner lasten $\lambda \mathbf{R}_0$ fås (5.1.1).

$$\mathbf{K}\mathbf{V} = \lambda \mathbf{R}_0 \tag{5.1.1}$$

hvor \mathbf{K} er den globale stivhedsmatrix, og \mathbf{V} er systemflytningerne. \mathbf{R}_0 kan opfattes som en slags enhedslast svarende til $\lambda = 1$.

Spændingstilstanden i konstruktionen kan skrives som $\lambda \boldsymbol{\sigma}_0$, hvor spændingstilstanden $\boldsymbol{\sigma}_0$ svarer til enhedslasten \mathbf{R}_0 .

Tilstanden før buling (Prebuckling) betegnes fundamentaltilstanden, og da vi yderligere antager linearitet beskrives vejen som en *Lineær fundamentaltilstand*.

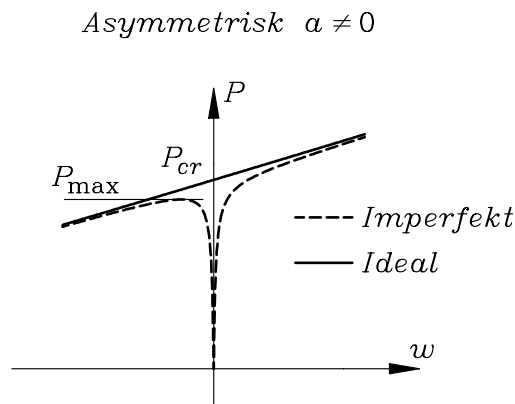


Fig. 5.3: Asymmetrisk stabilitetsopførsel

Den klassiske stabilitetsteori beskriver udelukkende lastniveauet, λ_{cr} (cr : critical), og buleformen, medens forholdene efter buling (postbuckling) ikke beskrives. Ved såkaldte asymptotiske analyser kan man opstille udtryk for opførslen efter buling, idet de dog i princippet kun gælder for vilkårligt små udbøjninger. Ved sammenligning med fuldt ikke-lineære beregninger viser det sig imidlertid, at de asymptotiske beregninger har et relativt stort gyldighedsområde.

Igennem den asymptotiske analyse kan konstruktionerne deles op i 2 hovedgrupper, de asymmetriske og de symmetriske. På Figur 5.3 er optegnet opførslen for en asymmetrisk konstruktion, der fra den asymptotiske analyse er karakteriseret ved, at $a \neq 0$. Lastniveauet er afbildet som en funktion af en karakteristisk udbøjning, w , der for en simpelt understøttet søjle ville svare til tværubøjningen i midten. I Figuren er der yderligere optegnet opførslen af en imperfekt konstruktion, og det bemærkes, at den maksimale last P_{max} er mindre end den kritiske last, P_{cr} . Rammekonstruktioner kan have en asymmetrisk opførsel, men ellers vil det mere typisk være skalkonstruktioner.

Imperfektioner vil normalt bestå af forhåndskrumninger, der ikke giver spændinger i bjælken, men imperfektioner kan også fremkomme på anden måde f.eks. fra ikke-central lastpåførsel eller residualsændinger. I Figurene 5.3 og 5.4 er de imperfekte konstruktioners opførsel optegnet for et bestemt imperfektionsniveau, og jo større imperfektion jo større afvigelse fra den ideale eller imperfektionsfri konstruktions opførsel.

Man kan vise, at de farligste geometriske imperfektioner har form som buleformen. Hermed kan man få et normeringsgrundlag for sammenligninger af imperfektioner, og buleformen får en central betydning ved vurdering af imperfektionsfølsomheden.

I Figur 5.4 er der optegnet symmetriske postbucklingopførsler, og disse kan underopdeles i 3 grupper afhængigt af størrelsen, b , der bestemmes i den asymptotiske analyse. Søjler vil svare til de postbuckling neutrale, og her har imperfektionerne kun den betydning, at udbøjningerne bliver større, medens den maksimale bæreevne med god tilnærmelse kan sættes til den klassiske kritiske last. Foldning af plader giver en postbuckling stabil opførsel, og det betyder, at der er en betydelig bæreevne udover stabilitetslasten. Postbuckling beteg-

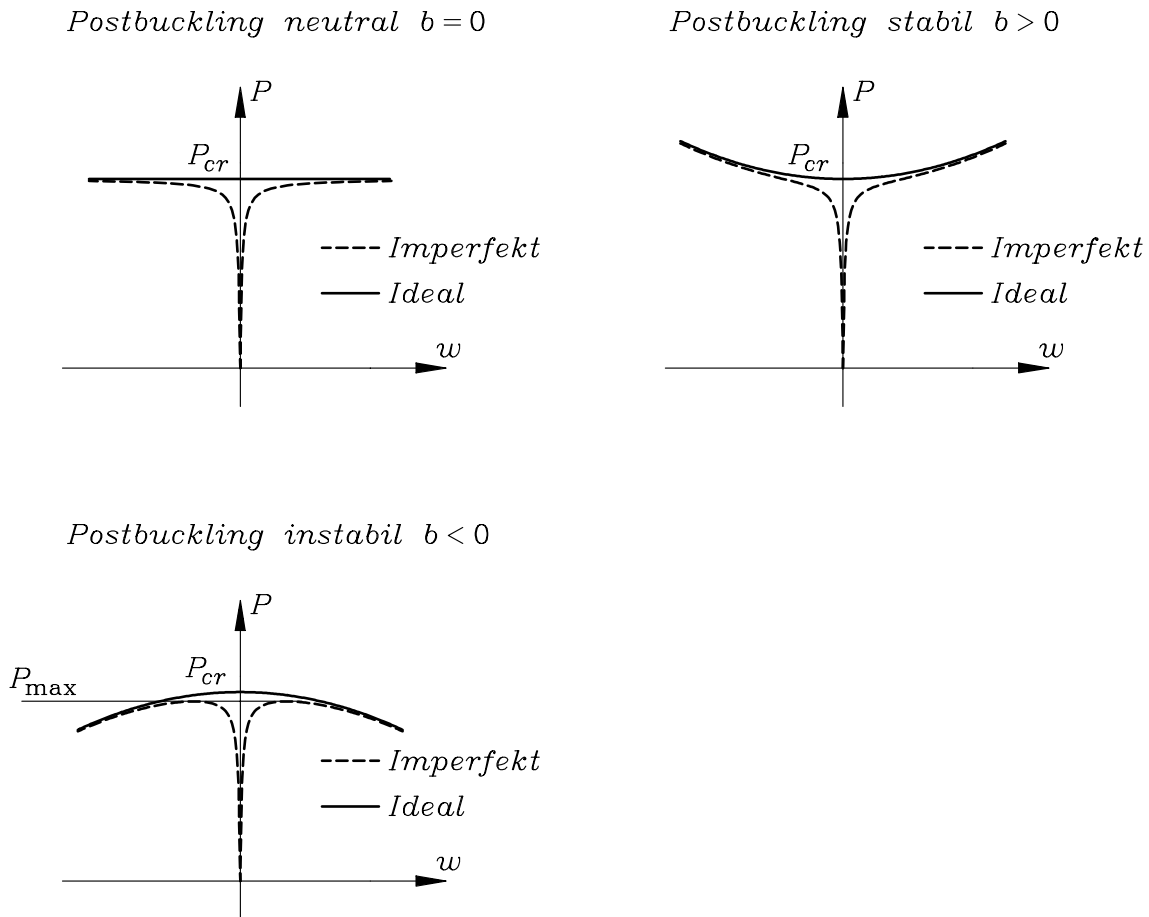


Fig. 5.4: Symmetrisk stabilitetsopførsel

nes også det post-kritiske område, og ved beregninger af tyndpladekonstruktioner i stål eller stressed-skin konstruktioner i træ tillades, at denne ekstra bæreevne indregnes. Stabilitetslastens betydning er her, at systemets virkemåde ændres, idet pladen får kraftige tværudbøjninger. Dette medfører indirekte en nedsættelse af aksialstivheden, som har betydning for den samlede optagelse af last.

Skalkonstruktioner kan være postbucklinginstabile ($b < 0$), og disse konstruktioner er som de asymmetriske *Imperfektionsfølsomme*. Den klassiske kritiske last kan overvurdere bæreevnen betydeligt, men udfra imperfektionsniveauet kan man opstille asymptotiske gyldige formler for bæreevnen udfra den klassiske kritiske last. Rumgitre kan være imperfektionsfølsomme, og den normale dimensioneringsmetode tager implicit hensyn til dette ved empirisk at nedsætte lastniveauet i forhold til en beregning baseret på den klassiske kritiske last.

I det følgende opstilles kun beregningsmetoder til bestemmelse af den klassiske kritiske last, men man må i fremtiden forvente et stigende behov for en vurdering af postbucklingopførslen. Specielt vil imperfektionsfølsomheden blive inddraget mere direkte i analyserne, og ikke som nu blive behandlet udfra empiriske formler.

5.2 Ikke-lineært tøjningsmål

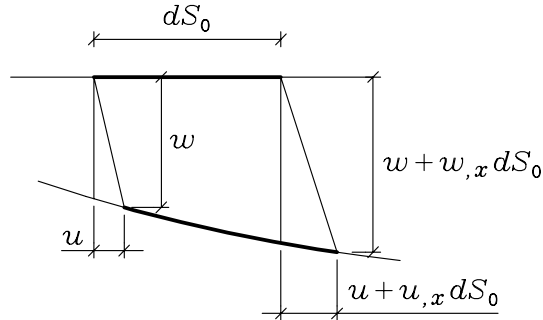


Fig. 5.5: Deformationsmål

For at kunne behandle stabilitetsfænomener er det nødvendigt at indføre et tøjningsmål, der er ikke-lineært. I et ikke-lineært tøjningsmål indgår en eller flere af de flytningsaffledede på en ikke-lineær måde f.eks. kvadratisk. Hermed får vi mulighed for at beskrive sammenhængen mellem aksialtøjningen og tværudbøjningen svarende til, at bjælken forlænges, hvis den får en tværudbøjning. I den lineære teori kan dette fænomen ikke beskrives, og det ikke-lineære tøjningsmål er altså en bedre tilnærmelse til virkeligheden. Anvendelse af det ikke-lineære tøjningsmål er også nødvendig ved beregning af imperfekte konstruktioner, hvor man beregner den fuldt ikke-lineære last-flytningssammenhæng.

I Figur 5.5 er der optegnet deformationen af et element, dS_0 , og vi ønsker i første omgang at bestemme længden af det deformerede element, dS .

Ved anvendelse af Pythagora's fås direkte, (5.2.1).

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{(dS_0 + u_{,x}dS_0)^2 + (w_{,x}dS_0)^2} \\ &= dS_0 \sqrt{1 + 2u_{,x} + u_{,x}^2 + w_{,x}^2} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Idet vi definerer tøjningen, ϵ_x , som forskellen mellem det deformerede og det udeformerede element i forhold til den oprindelige længde, fås (5.2.2)

$$\epsilon_x = \sqrt{1 + 2u_{,x} + u_{,x}^2 + w_{,x}^2} - 1 \quad (5.2.2)$$

Man kan benytte forskellige definitioner af tøjningsmålet ved den ikke-lineære opførelse, men da vi forudsætter *små tøjninger* og *store flytninger* har det ingen praktisk betydning. For en uddybning af emnet henvises til litteraturen om kontinuummeknik.

Tøjningerne antages som sagt at være små, og derfor rækkeudvikles formlen. Vi benytter $\sqrt{1 + \epsilon} \cong 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ og får (5.2.3)

$$\epsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}u_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \quad (5.2.3)$$

For en typisk rammekonstruktion er aksialstivheden langt større end bøjningsstivheden (målt på en passende dimensionsløs måde), og derfor vil der gælde, at $u_{,x}^2 \ll w_{,x}^2$. Herved kan tøjningsmålet reduceres til (5.2.4).

$$\epsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \quad (5.2.4)$$

Med henblik på den senere anvendelse opdeles tøjningsmålet i en lineær og ikke-lineær del. Krumningstøjningen antages stadig at være lineær, og man får dermed (5.2.5).

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_{lineær} + \epsilon_{ikke-lineær} \\ &= \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ -w_{,xx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

5.3 Arbejdsprincip

Fremgangsmåden er at opstille Virtuelt Arbejdes Princip i 2 nabolilstande, der har samme lastniveau. Herved kan man opstille et udtryk til bestemmelse af forskellen i flytningerne mellem de 2 nabolilstande. Den værdi af lastparameteren, λ , for hvilke der eksisterer egentlige løsninger af tillægflytningerne, defineres som den kritiske last.

Den første tilstand vælger vi svarende til fundamentalvejen, og vi betegner den som 0-tilstanden. Idet fundamentalvejen antages lineær, fås spændingsfordelingen, σ^0 , i konstruktionen ud fra den lineære elementmetodeløsning, som beskrevet i afsnit 5.1. Tøjningsdefinitionen er lineær, og hermed er de virtuelle tøjninger også lineære, som vist i (5.3.1).

$$\delta\epsilon^0 = \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ -\delta w_{,xx} \end{Bmatrix} \quad (5.3.1)$$

Virtuelt arbejde anvendt på hele konstruktionen giver (5.3.2).

$$\int_{konstruktion} \sigma^{0T} \delta\epsilon^0 dV = A_{ydre} \quad (5.3.2)$$

Den anden tilstand betegnes 1-tilstanden, og vælges at ligge på den bifurkerede gren. Spændingerne og flytningerne i denne tilstand opfattes som en sum af størrelserne på fundamentalvejen plus nogle tillægsled som vist i (5.3.3).

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \sigma^0 + \Delta\sigma \\ V^1 &= V^0 + \Delta V \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Ved opstilling af det Virtuelle Arbejdes Princip er det afgørende, at tøjningsmålet på den bifurkerede vej ikke er lineært. De virtuelle tøjningsinkremitter, $\delta\epsilon^1$, afhænger af det niveau, som flytningerne har det pågældende sted. I formel (5.3.4) er udtrykket skrevet op, idet vi udnytter opdelingen af tøjningerne i en lineær og en ikke-lineær del, som vist i (5.2.5).

$$\begin{aligned}\delta\epsilon^1 &= \delta\epsilon_{line\varrho r}^1 + \delta\epsilon_{ikke-line\varrho r}^1 \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \delta u_{,x} \\ -\delta w_{,xx} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} w_{,x}^1 \delta w_{,x} \\ 0 \end{array} \right\}\end{aligned}\quad (5.3.4)$$

Formeludtrykket for det ikke-lineære bidrag kan fås ved at differentiere m.h.t. $w_{,x}$, og tolke den virtuelle tøjningsændring som differentialkvotienten gange den virtuelle ændring i $w_{,x}$. I (5.3.4) ses, at flytningerne i udgangstilstanden, w^1 , har betydning for størrelsen af de virtuelle tøjninger.

Herefter kan det Virtuelle Arbejde opskrives i 1-tilstanden som vist i (5.3.5).

$$\int_{konstruktion} \sigma^{1T} \delta\epsilon^1 dV = A_{ydre} \quad (5.3.5)$$

Ved at vælge de samme virtuelle flytninger i de 2 tilstande opnår man, at det ydre arbejde er ens i de 2 tilfælde. Hermed fås formel (5.3.6), der giver et såkaldt variationsprincip til bestemmelse af tillægsflytningerne, $\Delta\mathbf{V}$.

$$\int_{konstruktion} \sigma^{1T} \delta\epsilon^1 dV = \int_{konstruktion} \sigma^{0T} \delta\epsilon^0 dV \quad (5.3.6)$$

Ved at benytte (5.3.3) og (5.3.4) kan (5.3.6) omskrives til (5.3.7).

$$\begin{aligned}&\int_{konstruktion} \sigma^{0T} \delta\epsilon_{line\varrho r}^1 dV + \int_{konstruktion} \Delta\sigma^T \delta\epsilon_{line\varrho r}^1 dV \\ &+ \int_{konstruktion} \sigma^{0T} \delta\epsilon_{ikke-line\varrho r}^1 dV = \int_{konstruktion} \sigma^{0T} \delta\epsilon^0 dV\end{aligned}\quad (5.3.7)$$

I (5.3.7) har vi bortkastet højere ordens led, der afhænger kvadratisk i tillægsstørrelserne, idet vi kun er interesseret i grænsetilfældet, hvor vi netop får egentlige løsninger for tillægsflytningerne.

De lineære udtryk for de virtuelle tøjninger er uafhængige af tilstanden, $\delta\epsilon_{line\varrho r}^1 = \delta\epsilon_{line\varrho r}^0$, og hermed kan variationsprincippet skrives som (5.3.8).

$$\int_{konstruktion} \Delta\sigma^T \delta\epsilon_{line\varrho r}^1 dV + \int_{konstruktion} \sigma^{0T} \delta\epsilon_{ikke-line\varrho r}^1 dV = 0 \quad (5.3.8)$$

Hermed er der opstillet et variationsprincip til bestemmelse af tillægflytningerne og dermed tillægsspændingerne. I næste afsnit vil vi foretage en diskretisering af udtrykket, idet vi indfører en tilnærmet beskrivelse af flytningstilstanden i de enkelte elementer. Det resulterende problem bliver hermed et lineært egenværdiproblem, og den numerisk laveste egenværdi vil netop svare til stabilitetslasten og egenfunktionen til den tilhørende buleform.

5.4 Opstilling af geometrisk stivhedsmatrix

Den styrende differentialligning for en bjælke påvirket af en normalkraft, N , er givet ved (5.4.1).

$$w_{,xxxx} - \frac{N}{EI}w_{,xx} = 0 \quad (5.4.1)$$

Løsningerne til differentialligning afhænger af normalkraftens fortegn, men i begge tilfælde udtrykkes løsningen med parameteren, k , der er defineret i (5.4.2).

$$k^2 = \frac{|N|}{EI} \quad (5.4.2)$$

Løsningerne kan skrives som (5.4.3).

$$w(x) = \begin{cases} C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3x + C_4 & \text{for } N < 0 \\ C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx + C_3x + C_4 & \text{for } N > 0 \end{cases} \quad (5.4.3)$$

hvor $C_1 - C_4$ er arbitrære konstanter, der bestemmes af randbetingelserne.

Differentialligningens 2 principielt forskellige løsninger skyldes, at tværudbøjningen henholdsvis formindskes af en trækraft og forøges af en trykkraft. For $k \rightarrow 0$ svarer $w(x)$ til de sædvanlige formfunktioner for det lineære tilfælde, se kapitel 2.

Med udgangspunkt i (5.4.3) kan man opstille formfunktionerne for w og dermed for de afledede. Fremgangsmåden kaldes - som beskrevet i kapitel 4 - at anvende eksakte formfunktioner. Rent beregningsteknisk volder det imidlertid nogle vanskeligheder, hvilket kan ses af, at k , som udtrykker bjælkens relative normalkraftpåvirkning, indgår ikke-lineært i formfunktionerne. Ved en beregning med eksakte formfunktioner skal man først skønne normalkraftfordelingen i konstruktionen, og derefter kan formfunktionerne bestemmes. Ud fra formfunktionerne kan man benytte variationsprincippet (5.3.8) til at afgøre om konstruktionen er stabil, og herefter kan man skønne en ny normalkraftfordeling. Proceduren gentages indtil afvigelsen mellem det skønnede og det beregnede er tilpas lille, og metoden svarer til at løse et ikke-lineært egenværdiproblem. Vi vil i det følgende benytte en alternativ fremgangsmåde baseret på tilnærmede formfunktioner. Løsningen vil hermed afhænge af elementinddelingen, men til gengæld er selve proceduren langt mere enkel, idet vi blot skal løse et lineært egenværdiproblem.

I det følgende benyttes formfunktionerne svarende til det lineære tilfælde, og da vi skal benytte $w_{,x}$ i variationsprincippet, opskrives denne ud fra formfunktionerne som vist i (5.4.4).

$$w_{,x} = \mathbf{G}\mathbf{v} \quad (5.4.4)$$

hvor matricen, \mathbf{G} er defineret i (5.4.5) og (5.4.6). Indholdet i \mathbf{G} fås som 2. række i flytningsinterpolationsmatricen, \mathbf{N} , differentieret m.h.t. x , se (2.2.17) og (2.2.18).

$$\mathbf{G} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & 0 & -g_1 & g_3 \end{bmatrix} \quad (5.4.5)$$

$$\begin{aligned} g_1 &= 6s - 6s^2 \\ g_2 &= l(-1 + 4s - 3s^2) \\ g_3 &= l(2s - 3s^2) \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Herefter kan vi foretage en egentlig diskretisering af variationsprincippet, og vi omskriver hver del for sig.

$$\int_{konstruktion} \Delta\boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\epsilon}_{line\text{\textcircled{r}}}^1 dV = \delta\mathbf{V}^T \mathbf{K} \Delta\mathbf{V} \quad (5.4.7)$$

Omskrivningen følger direkte fremgangsmåden i det lineære tilfælde bortset fra, at vi bestemmer tilvækster i flytninger fremfor totale flytninger, jvf. (2.3.7) med tilhørende udledelser.

$$\int_{konstruktion} \boldsymbol{\sigma}^{0T} \delta\boldsymbol{\epsilon}_{ikke\text{\textcircled{r}}\text{-line\text{\textcircled{r}}}^1 dV = \sum_{i=1}^{elementer} \int_{element} N^i w_{,x} \delta w_{,x} dV \quad (5.4.8)$$

hvor N^i betegner normalkraften i element i .

I (5.4.8) får vi kun bidrag fra normalkraften, da der kun er ikke-lineære tøjningsmål i aksialretningen.

I (5.4.9) omskrives bidraget fra det enkelte element, og da normalkraften er konstant i det enkelte element fås.

$$\int N^i w_{,x} \delta w_{,x} dV = N^i \int_{element} (\mathbf{G}\delta\mathbf{v})^T \mathbf{G}\mathbf{v} dV \quad (5.4.9)$$

Vi har a.h.t. senere transponeret udtrykket for $\delta w_{,x}$, og ved udregning omskrives (5.4.9) til (5.4.10).

$$\int N^i w_{,x} \delta w_{,x} dV = \delta \mathbf{v}^T N^i \int_{element} \mathbf{G}^T \mathbf{G} dV \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{k}_G \mathbf{v} \quad (5.4.10)$$

Vi har indført \mathbf{k}_G , som betegnes den "geometriske matrix" (eller egentlig den geometriske stivhedsmatrix), se (5.4.11).

$$\mathbf{k}_G = N \int_{element} \mathbf{G}^T \mathbf{G} dV \quad (5.4.11)$$

Som det fremgår af (5.4.11) indgår N lineært i \mathbf{k}_G , og udregningen kan foretages for et bestemt lastniveau og herefter skaleres til et andet.

Ved udregning kan \mathbf{k}_G bestemmes, og man får (5.4.12).

$$\mathbf{k}_G = N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \frac{1}{l} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{l} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} l & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{l} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5} \frac{1}{l} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} l & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} l \end{bmatrix} \quad (5.4.12)$$

I (5.4.12) udtrykker l den fysiske længde af bjælkeelementet.

Svarende til opbygningen af den globale stivhedsmatrix kan vi opbygge en global geometrisk stivhedsmatrix, \mathbf{K}_G , som vist i (5.4.13), jvf iøvrigt (2.5.5).

$$\mathbf{K}_G = \sum_{i=1}^{nelem} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{k}_{Gdrejet}^i \mathbf{A}^i \quad (5.4.13)$$

Drejningen af den geometriske stivhedsmatrix foregår svarende til drejningen af den lokale stivhedsmatrix, se afsnit 2.4, og \mathbf{A} udtrykker den topologiske sammenhæng jvf. afsnit 2.5. Herefter kan variationsprincippet skrives som (5.4.14).

$$\delta \mathbf{V}^T (\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_G) \mathbf{V} = 0 \quad (5.4.14)$$

hvor vi bestemmer \mathbf{K}_G for et bestemt lastniveau, og den aktuelle last svarer til λ gange lastniveauet.

Da (5.4.14) skal gælde for en vilkårlig valg af virtuelle flytninger, $\delta \mathbf{V}$, fås (5.4.15).

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_G) \mathbf{V} = 0 \quad (5.4.15)$$

Formel (5.4.15) svarer til et lineært egenværdiproblem, men man kan også formulere problemet, som bestemmelse af nulpunkter for determinanten af den samlede stivhedsmatrix, se (5.4.16).

$$\det(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{K}_G) = 0 \quad (5.4.16)$$

Den geometriske stivhedsmatrix, \mathbf{K}_G , udtrykker den stivhedsændring, der skyldes normalkraften. Dette svarer til deformationsmetoden (håndregning), idet man her bestemmer korrektionerne til Z_i^j koefficienterne afhængigt af normalkraftens størrelse. Stabilitetslasten defineres som det lastniveau, λ , hvor determinanten af \mathbf{Z} er 0, og ved dette lastniveau er der en uendelighed af løsninger.

Stabilitetssvigtets form kan bestemmes som egenvektoren for den tilhørende egenværdi, mens selve størrelsen er ubestemt. I kommercielle programmer skaleres buleformen på en passende form, men det er stadig kun formen, der er afgørende.

Man kan fysisk tolke stabilitetsligningerne i (5.4.14), idet $\lambda\delta\mathbf{V}^T\mathbf{K}_G\mathbf{V}$ er det ydre arbejde ved en virtuel flytning $\delta\mathbf{V}$ og $\delta\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V}$ det tilsvarende indre arbejde. Stabilitetslasten defineres da, som det lastniveau for hvilket det ydre arbejde er lig det indre arbejde. Tolkningen er mulig for rammer, men er ikke generelt anvendelig, og fører til forkerte løsninger ved f.eks. foldning af plader påvirket af koncentrerede belastninger.

5.5 Løsning af systemet

Matrixligningen (5.4.15) har ligeså mange egenværdier som overtallige, og det vil beregningsteknisk være meget dyrt at finde dem alle. For en konstruktionsanalyse er det imidlertid kun de laveste, der har interesse, og typisk vil man kun finde en meget lille brøkdelen af det samlede antal egenværdier. Der findes ingen sluttede løsningsformler, og man er henvist til at løse problemet iterativt.

I Numerisk Analyse behandles forskellige metoder, og vi vil her blot referere den enkleste, der bygger på såkaldt invers vektoriteration. Udgangspunktet er, at man gætter på en egenvektor \mathbf{V}_i , og beregner et nyt gæt, \mathbf{V}_{i+1} , ud fra formelen (5.5.1). Formlen svarer til at løse et antal statiske lasttilfælde, og man kan udnytte faktoriseringen af \mathbf{K} fra beregningen af normalkraftfordelingen.

$$\mathbf{K}\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{K}_G\mathbf{V}_i \quad (5.5.1)$$

Man kan vise, at \mathbf{V}_{i+1} vil konvergere mod egenvektoren svarende til den laveste egenværdi. Egenværdien kan enten findes af formel (5.5.2) eller - hvad der er mere normalt - ud fra Rayleigh's brøk, men dette falder uden for denne sammenhæng.

$$\lambda^{-1} = -\frac{|\mathbf{V}_{i+1}|}{|\mathbf{V}_i|} \quad (5.5.2)$$

Ved bestemmelse af forholdet mellem de normerede længder af egenvektorerne skal der tages hensyn til retningen, men dette vil formelmæssigt blive ret komplekst, og er derfor udeladt her.

Fremgangsmåden betyder, at kun den laveste egenværdi bestemmes, og hvis man ønsker flere, kan man f.eks. anvende simultan vektoriteration. Ved sammenfaldende egenværdier kan der opstå beregningstekniske problemer, og den angivne metode vil ikke altid kunne bestemme en egenvektor, men derimod godt en egenværdi.

Idet følgende er der gennemregnet 2 simple eksempler svarende til en Euler søjle, og her løses egenværdiproblemet direkte ved analytisk at beregne determinanten. Denne fremgangsmåde er kun mulig ved et meget beskedent antal frihedsgrader, og som generel numerisk metode er den helt uanvendelig, idet determinant beregning er meget omkostningskrævende.

Vi betragter en simpelt understøttet søjle, og modellerer den med henholdsvis 1 og 2 elementer. Resultaterne kan bruges til at vurdere en given elementinddeling.

Med 1 element er randbetingelserne, at flytningen i de 2 endepunkter er 0. Stivhedsmatricen får herved kun 2 overtallige, idet vi også med det samme ser bort fra aksialflytningen, der ikke har betydning for stabilitetslasten.

I (5.5.3) og (5.5.4) er opskrevet henholdsvis stivhedsmatricen og den geometriske matrix.

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.5.3)$$

$$\mathbf{K}_G = -\lambda \frac{EI}{l^2} l \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \quad (5.5.4)$$

\mathbf{K}_G er bestemt for lastniveauet $-\frac{l^2}{EI}$ for at få en pænere normering af egenværdien, λ . Det teoretisk korrekte resultat er $\lambda = \pi^2$.

Vi benytter determinantudregningen som vist i (5.5.5).

$$\det(\mathbf{K} + \mathbf{K}_G) = 0 \quad (5.5.5)$$

Ved udregning fås en 2. grads ligning til bestemmelse af λ , se (5.5.6).

$$\left(4 - \frac{2}{15}\lambda\right)^2 - \left(2 + \frac{1}{30}\lambda\right)^2 = 0 \quad (5.5.6)$$

Ved løsning findes, se (5.5.7).

$$\lambda = \begin{cases} 12 & \text{eksakt } \pi^2 = 9.87 & \text{afvigelse 21.6 \%} \\ 60 & \text{eksakt } 4\pi^2 = 39.48 & \text{afvigelse 52.0 \%} \end{cases} \quad (5.5.7)$$

Afvigelsen fra det teoretiske resultat er betydelig, og man bør derfor ikke anvende et enkelt element til modellering af en Euler søjle. Emnet vil blive drøftet mere detaljeret i næste afsnit.

Med 2 elementer udnytter vi symmetrien, således at der stadig kun regnes på et element. Symmetribetragtningen betyder, at vi ikke bestemmer 2. buleform korrekt, og resultatet bliver en bestemmelse af 3. buleform. Dette er ikke afgørende her, men generelt skal man være varsom med symmetribetragtninger i stabilitetsberegninger.

Randbetingelserne svarer til, at flytningen i det 1. endepunkt er 0, medens drejningen i det 2. endepunkt er 0. Stivhedsmatricen får herved stadig kun 2 overtallige, idet vi som før ser bort fra aksialflytningen, der ikke har betydning for stabilitetslasten.

I (5.5.8) og (5.5.9) er opskrevet henholdsvis stivhedsmatricen og den geometriske matrix.

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{0.5l} \begin{bmatrix} 4 & -6\frac{1}{0.5l} \\ -6\frac{1}{0.5l} & 12\frac{1}{(0.5l)^2} \end{bmatrix} \quad (5.5.8)$$

$$\mathbf{K}_G = -\lambda \frac{EI}{l^2} 0.5l \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} \frac{1}{0.5l} \\ -\frac{1}{10} \frac{1}{0.5l} & \frac{6}{5} \frac{1}{(0.5l)^2} \end{bmatrix} \quad (5.5.9)$$

\mathbf{K}_G er bestemt for lastniveauet $-\frac{l^2}{EI}$ for at få en pænere normering af egenværdien, λ . Endvidere er den samlede længde af søjlen l , hvorved det teoretisk korrekte resultat stadig er $\lambda = \pi^2$.

Vi benytter igen determinantudregningen, og efter lidt regning fås løsningen som vist i (5.5.10).

$$\lambda = \begin{cases} 9.94 & \text{eksakt } \pi^2 = 9.87 & \text{afvigelse } 0.75 \% \\ 128.72 & \text{eksakt } 9\pi^2 = 88.83 & \text{afvigelse } 44.9 \% \end{cases} \quad (5.5.10)$$

5.6 Elementinddeling

Ved elementopdeling af en konstruktion skal man vurdere stabilitetssvigtets form og inddele i overensstemmelse med dette. Efter stabilitetsberegningen er gennemført, skal man sammenholde buleformen med elementinddelingen, og det kan medføre, at man er tvunget til at underdele visse elementer og udføre en ekstra gennemregning. Programmerne udskriver ingen advarsler om dette, og det er derfor alene op til brugeren at sikre en tilstrækkelig god elementinddeling.

Stabilitetssvigt af en konstruktion kan ske enten som en global svigtform, hvor et stort antal elementer deformeres, eller ved et lokalt svigt, hvor kun få elementer deformeres. Elementinddelingen har ikke særlig stor betydning for de globale svigt, idet det enkelte elements lokale opførsel er af mindre betydning. For lokale svigt er det derimod afgørende at få inddelt fint, og resultaterne fra forrige afsnit kan bruges som rettesnore.

En faldgrube ved vurdering af elementinddelinger er, at selvom stabilitetssvigtet tilsyneladende er globalt, kan det skyldes, at en grov elementinddeling har overset en lokal svigtform. Enkelte programsystemer anvender de eksakte formfunktioner, hvorved elementinddelingen ikke har betydning for nøjagtighed. Denne fremgangsmåde kan dog ikke videreføres til en egentlig ikke-lineær beregning, og derfor baserer langt den overvejende del af færdige systemer sig på de tilnærmede formfunktioner.

5.7 Anvendelse af færdigt programmel

Som eksempel er valgt en rammekonstruktion vist i Figur 5.6. For den såkaldte Roorda's ramme er stabilitetslasten beregnet ud fra de korrekte udbøjningsformer, og resultatet kan bruges til at sammenligne den numeriske løsning.

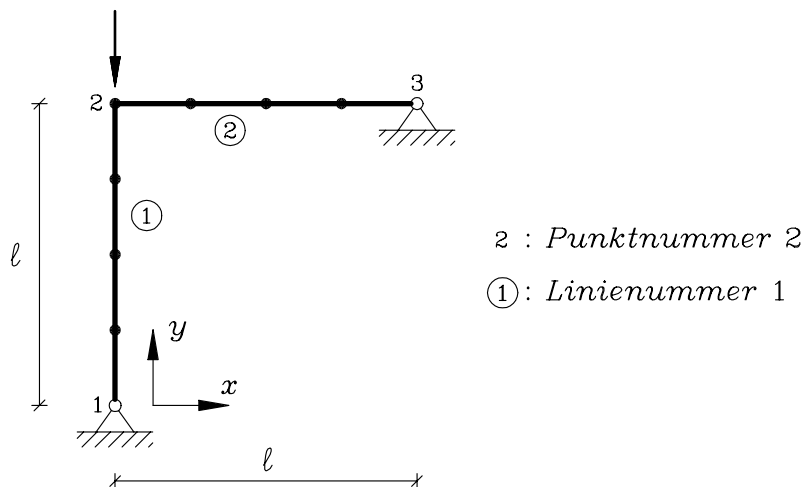


Fig. 5.6: Eksempel

Belastningen består af en lodret nedadrettet kraft, som giver tryk i det lodrette ben. I nogle tilfælde kan belastningen bestå af en fast og variabel del, hvilket svarer til at en del af \mathbf{K}_G ikke afhænger af λ . Cosmos kan som de fleste systemer ikke håndtere dette direkte, og man må derfor benytte en iterativ proces. Princippet er at skønne en værdi af λ , udregne belastningen og gennemføre stabilitetsberegningen. Hvis resultatet af beregningen giver en egenværdi på 1 er skønnet korrekt. I modsat fald korrigeres den skønnede værdi, og beregningen gentages.

Inddata er vist nedenfor, og vi vil kun kommentere enkelte dele. En nærmere beskrivelse kan enten findes i Cosmos-manualerne, eller i L. Damkilde "Cosmos - rammekonstruktioner", BKM, 1999.

```

c*
c*  Stabilitetseksempel - Elementmetoden for bjælkekonstruktioner
c*
c*  Geometrien, l = 4.0
  
```

```

c*
pt, 1, 0.0, 0.0;
pt, 2, 0.0, 4.0;
pt, 3, 4.0, 4.0;
crline, 1, 1, 2;
crline, 2, 2, 3;
c*
c* Elementgruppe, materiale og tværsnit (IPE200)
c*
egroup, 1, beam2d
mprop, 1, ex, 2.1e11
rconst, 1, 1, 1, 3, 2.85e-3, 19.4e-6, 0.1;
c*
c* Elementinddelingen
c*
m_cr, 1, 1, 1, 2, 4;
m_cr, 2, 2, 1, 2, 4;
nmerge;
c*
c* Understøtninger
c*
dpt, 1, au, 0.0, 3, 2;
c*
c* Belastning
c*
fpt, 2, fy, -10e3;
c*
c* Analyse
c*
a_buckling, 3, s, 100,,,,,1e-5
r_buckling

```

Da begge bjælker skal underinddeles, er der anvendt en geometrisk beskrivelse af konstruktionen, der effektiviserer underinddelingen.

Konstruktionens geometri beskrives v.h.a. 3 punkter (**pt**), som svarer til de 2 understøtninger og skæringspunktet mellem de 2 bjælker. Bjælkerne beskrives v.h.a. linier (**crline**), som går fra punkt til punkt. Princippet er som med knuder og elementer.

Linierne underinddeles v.h.a. **m_cr** (mesh create), og i dette tilfælde er der valgt 4 underinddelinger. Kommandoen **nmerge** (node merge/knude sammensmeltning) fjerner den ekstra knude, der genereres i hjørnepunktet, og skaffer dermed sammenhængen i konstruktionen. Belastning og understøtning angives med reference til punkterne, og systemet finder selv den tilsvarende knude. Cosmos opretter selv de nødvendige knuder og elementer, og nummererer disse fortløbende. Cosmos optimerer selv ligningsløsningen, så båndbredden har ingen betydning. Brugeren har normalt ikke behov for at kende den interne nummerering, men den kan optegnes, og punkter/elementer kan identificeres grafisk. Denne

geometriske beskrivelse letter brugeren for det besværlige arbejde med underinddelinger, og er helt essentielt ved modellering af plade/skive/skal konstruktioner.

Selve analysen foretages med ordren **r_buckling**, og med **a_buckling** er der defineret antallet af søgte egenverdier (3), metoden sub-space og nøjagtigheden $1e-5$.

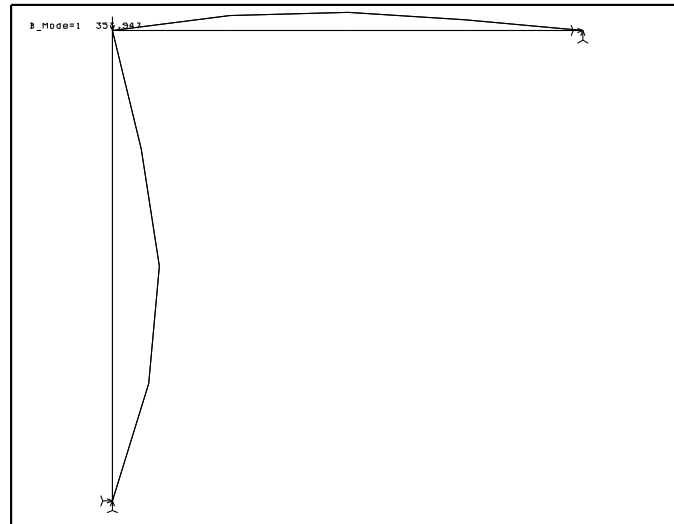


Fig. 5.7: Svigtform

Buleformen/svigtformen er vist i Figur 5.7, og egenværdien blev bestemt med en nøjagtighed på under 0.1 %.

Kapitel 6

Referencer

Nedenfor er angivet en række referencer, der kan bruges som indgang til elementmetoden indenfor forskellige områder. Referencerne er opdelt i 3 grupper, men en del af referencerne dækker mere end et område.

Bjælke- og rammesystemer:

Thelanderson, Sven
Konstruktionsberäkningar med dator
Studentlitteratur, 1984

Skive-, plade- og skalberegninger:

Nielsen, L.O.
Elementmetoden til Bærende Konstruktioner I
Afdelingen for Bærende Konstruktioner, F 103, 1985

Samuelsson, Alf / Wiberg, Niels Erik
Finita elementmetodens grunder
Studentlitteratur, 1988

Irons, Bruce and Ahmad, Sohrab
Techniques of finite elements
Ellis Horwood Limited, 1980

Bathe, Klaus-Jürgen
Finite Element Procedures in Engineering Analysis
Prentice-Hall, 1982

Elementmetoden til ikke-strukturelle problemer som varmeledning, fluid mekanik, geoteknik m.m. Følgende referencer kunne også være rubriceret under ovenstående gruppe, men er medtaget her a.h.t. elementmetodens andre anvendelsesområder.

Zienkiewicz, O. C.

The finite Element Method

McGraw-Hill, 1977

Smith, I.M. and Griffiths, D.V.

Programming the finite element method

John Wiley & Sons, 1982

Ottosen, Niels Saabye and Petersson, Hans

Introduction to the finite element method

Prentice Hall, 1992