

Grundlæggende elementmetode

for

Bjælker og Rammer

**1. udg. februar 2006
Sven Krabbenhøft**

Indholdsfortegnelse

1	Indledning 1
2	Bjælkekonstruktioner 3
2.1	Indledning 3
2.2	Lokalanalyse 6
2.2.1	Den direkte metode 7
2.3	Transformation til globale koordinater 10
2.4	Den globale stivhedsrelation 13
2.5	Løsning af ligningssystem 19
2.6	Bjælke med charniere 21
2.6.1	Konjureret bjælke 23
3	Arbejdslikningen 24
3.1	Generelt 24
3.2	Formfunktioner 24
3.3	Flytningsinterpolationsmatricen 30
3.4	Tøjningsinterpolationsmatricen 30
3.5	Udledning af stivhedsmatricen 31
3.6	Hensyn til lokallaster 35
3.7	Bjælke på lineærelastisk underlag 36

Grundlæggende elementmetode for bjælker og rammer

1 Indledning

Ideen i elementmetoden er at opdele en konstruktion i et antal mindre overskuelige elementer og herefter på basis af en på forhånd kendt sammenhæng mellem kræfter og deformationer for disse elementer at bestemme det samlede (globale) systems opførsel.

Metoden er oprindelig udviklet til beregning af bærende konstruktioner men bruges i dag også indenfor andre fagområder – eksempelvis geoteknik og hydraulik.

Metoden kan bruges til analyse af alle former for bærende konstruktioner men i dette notat vil kun bjælker blive behandlet.

Det er karakteristisk for metoden at den er meget systematisk og dog meget fleksibel at anvende. Der opstilles et relativt stort antal lineære ligninger således at det i praksis er nødvendigt at anvende computerprogrammer.

De punkter i konstruktionen hvor de enkelte elementer mødes kaldes knuder og i bjælke-rammekonstruktioner vil disse punkter kunne identificeres umiddelbart idet de typisk vil være understøtningspunkter, knæpunkter i konstruktionen eller hvor 3 eller flere konstruktionselementer mødes. Ligeledes indlægges ofte knuder i de punkter hvor der angriber enkeltkræfter eller momenter. I konstruktioner som skiver og plader vil det være mere op til ingeniøren at foretage inddelingen i elementer.

Efter at konstruktionen er opdelt i et antal elementer med tilhørende knudepunkter opskrives eller udledes stivhedsrelationerne for de enkelte elementer. Stivhedsrelationerne går ud på at skaffe en sammenhæng mellem de kræfter der virker i det enkelte elements endepunkter (knuder) og flytningerne i de samme punkter. Dette kaldes en lokal analyse.

Herefter går man over til at se på den samlede konstruktions opførsel og her etableres også en sammenhæng mellem de ydre kræfter i knuderne og knudernes flytninger. Dette kaldes den globale analyse og denne udføres ved at man ved hjælp af **ligevægtsbetingelser** og **kompatibilitetsbetingelser** for alle knudepunkter 'samler' alle de lokale stivhedsrelationer til en global stivhedsrelation der omfatter et antal lineære ligninger som herefter løses. Løsningen til disse ligninger vil være **flytningerne af knudepunkterne** i det globale system.

Elementmetoden er en tilnærmelsesmetode og generelt er det sådan at jo finere elementinddeling man laver jo nøjagtigere bliver resultaterne.

For bjælke- og rammekonstruktioner hvor de enkelte elementers tværsnit har konstante dimensioner giver metoden dog exacte resultater forudsat at alle ydre laster angriber i knudepunkterne.

Det er her forudsat at de anvendte materialer er lineærelastiske hvilket medfører at superpositionsprincippet er gældende for sammenhængen mellem kræfter og deformationer i konstruktionen.

2 Bjælkekonstruktioner

2.1 Indledning

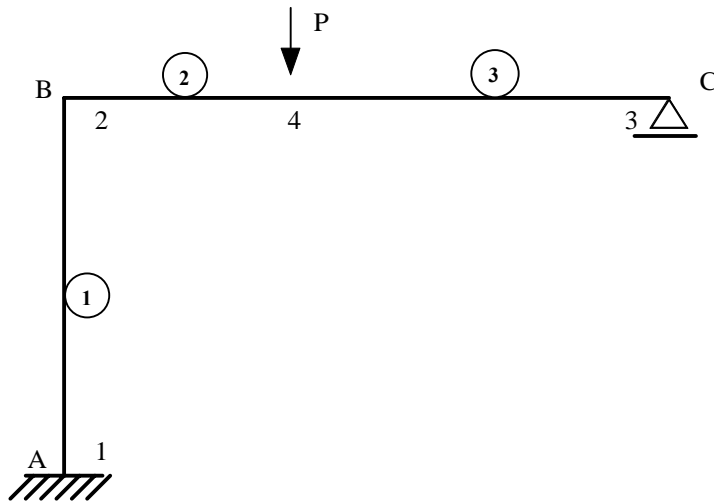


Fig 2.1

Vi betragter den på fig. 2.1 viste konstruktion der kan betragtes som sammenstykket af et antal elementer som er forbundet i knudepunkterne som er nummereret 1,2 og 3 som er sammenfaldende med A,B og C.

Hvert knudepunkt har i det viste koordinatsystem – kaldet det globale koordinatsystem - 3 bevægelsesmuligheder (frihedsgrader) : lodret bevægelse (v), vandret bevægelse (u) og en vinkeldrejning α .

Af beregningstekniske grunde kan det være praktisk at indskyde en knude i P's angrebspunkt som så får nummeret 4 hvorved antallet af elementer bliver 3.

Samtlige disse bevægelser eller flytninger samles i den globale flytningsvektor \mathbf{q} der således kan skrives som :

$$\mathbf{q} = \{u_1, v_1, \alpha_1, u_2, v_2, \alpha_2, \dots, u_m, v_m, \alpha_m\} \quad \text{eller}$$

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, \dots, q(3m-2), q(3m-1), q(3m)\}$$

idet der i det generelle tilfælde forudsættes at være m knudepunkter. Her er m altså = 4. Det ses at \mathbf{q} indeholder $3m$ elementer og disse betegnes **knudflytningerne**

Konstruktionen er således påvirket af et antal ydre kræfter som indtil videre forudsættes at angribe i knudepunkterne. Det bemærkes at reaktionskræfter også betragtes som ydre kræfter. Ydre kræfter kan opdeles i følgende komponenter : lodret kraft, vandret kraft og et moment. For nemheds skyld betegnes et moment når det er bekvemt også som en kraft. Disse kræfter samles i den globale kraftvektor \mathbf{R} der således kan skrives som :

$$\mathbf{R} = \{N_1, Q_1, M_1, N_2, Q_2, M_2, \dots, N_m, Q_m, M_m\} \quad \text{eller}$$

$$\mathbf{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, \dots, R(3m-2), R(3m-1), R(3m)\}$$

Det ses at \mathbf{R} ligesom \mathbf{q} indeholder $3m$ elementer og disse betegnes **knudekræfterne**.

Da der er en lineær sammenhæng mellem flytninger og kræfter gælder det at :

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} .$$

\mathbf{K} , der kaldes den globale stivhedsmatrix, er en $3m$ gange $3m$ symmetrisk og singular matrix hvis elementer indtil videre er ubekendte men som skal bestemmes inden ligningssystemet kan løses.

Opstillingen af stivhedsmatricen udgør et af kerneområderne i det samlede arbejde ved anvendelse af elementmetoden og er behandlet i afsnit 2.3

Det er ligningen :

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \quad (2.1)$$

der er grundlaget for elementmetoden som den er behandlet i dette notat og man siger at man 'anvender elementmetoden efter deformationsmetoden'. På engelsk bruges betegnelsen 'displacement method' eller 'stiffness approach'

Vi har her at gøre med et lineært ligningssystem med $3m$ ubekendte hvortil der er et entydigt løsningsæt og ligningen (2.1) løses med hensyn til elementerne i vektoren \mathbf{q} således at det er **flytningerne i knuderne** der bestemmes.

Når \mathbf{q} er bestemt kan elementerne i \mathbf{R} bestemmes. \mathbf{R} indeholder knudekræfter som kan være **ydre kræfter** som normalt vil være kendte samt **reaktioner** som kan være kendte eller ukendte. Hvis reaktionerne er kendte vil de i praksis oftest have værdien 0.

Som vi senere skal se kan man ikke løse (2.1) ved blot at inverttere \mathbf{K} . Dels er \mathbf{K} singular og dels er det altid sådan at de ubekendte hvoraf der er $3m$ fordeler sig på både \mathbf{R} og \mathbf{q} .

At ligningssystemet virkelig indeholder $3m$ ubekendte hvor m er antallet af knudepunkter ses ved følgende betragtning :

Ved hver knude er der 3 flyningskomponenter og 3 kraftkomponenter og for hver knude vil 3 af disse være kendte størrelser og de 3 øvrige ubekendte. Idet der henvises til fig. 2.2 betragtes understøtningspunkterne hvor der kan være tale om følgende 3 grundformer :

1. simpel understøtning med rulleleje (eksempelvis vandret rullebane)
2. fast simpel understøtning
3. fast indspænding

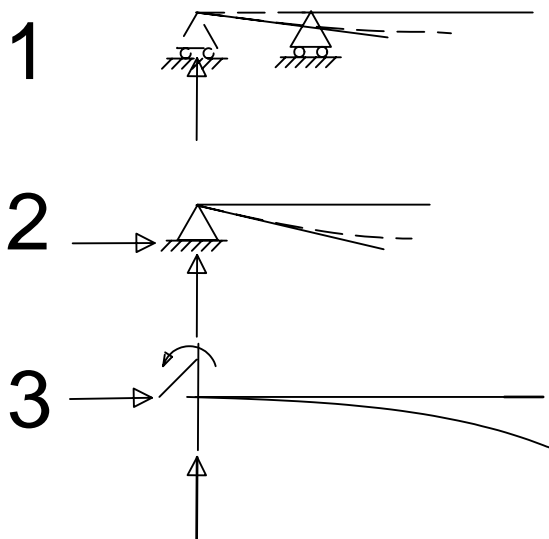


Fig 2.2

Ved **1.** er følgende størrelser kendte : Vandret reaktion, moment og lodret bevægelse der er alle = 0. Det er her forudsat at der ikke angriber ydre kræfter (reaktioner undtaget) ved understøtningen men hvis dette alligevel er tilfældet vil disse være kendte. Der er altså 3 kendte størrelser.

De 3 ukendte størrelser er den vandrette flytning, vinkeldrejningen samt den lodrette reaktion.

Ved **2.** er følgende 3 størrelser kendte : Vandret og lodret flytning samt moment er alle = 0. Hvis der angriber et ydre moment vil dette være kendt.

De 3 ubekendte er følgende : Lodret og vandret reaktion samt vinkeldrejning.

Ved **3** er følgende 3 størrelser kendte : Vinkeldrejning samt vandret og lodret bevægelse er alle = 0.

De 3 ubekendte er følgende : Moment samt vandret og lodret reaktion.

Ved en knude som ikke ligger ved en understøtning vil det være de 3 flytningskomponenter som er ubekendte og knudekræfterne vil enten være = 0 eller have en anden kendt værdi.

I ligningssystemet (2.1) er alle de ubekendte altså ikke samlet i flytningsvektoren \mathbf{q} og systemet kan derfor ikke løses forudgående manipulation. I afsnit 2.5 er beskrevet en metode hertil.

For at ligningerne kan løses er det en forudsætning at konstruktionen er statisk stabil – dvs at der for plane konstruktioner skal være mindst 3 reaktionskomponenter.

2.2 Lokalanalyse

Konstruktionen opdeles som ovenfor nævnt i et antal retlinede elementer der er forbundet i knudepunkterne. For disse principielt ens elementer foretages en analyse af sammenhængen mellem kræfter og deformationer. Der betragtes udelukkende kræfter og deformationer i endepunkternes idet det indtil videre forudsættes at kræfterne kun angriber her.

Hvis vi ser på det lokale elements placering i det globale system kan knudekræfterne enten stamme fra påvirkningen fra en ydre kraft, en understøtning eller et naboelement.

Vi betragter elementet på fig 2.3 og fig. 2.4 For elementet indføres et almindeligt x-y koordinatsystem med origo i elementets nedre knudepunkt og x-aksen følger elementets længdeakse. Undersiden af elementet defineres som den side der ligger til højre for en når man stiller sig i det nedre knudepunkt og kigger ud af x-aksen – dvs den sædvanlige definition.

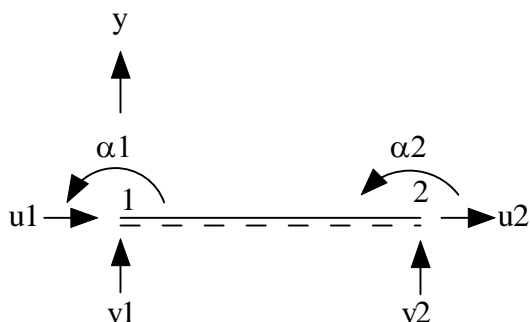


Fig 2.3

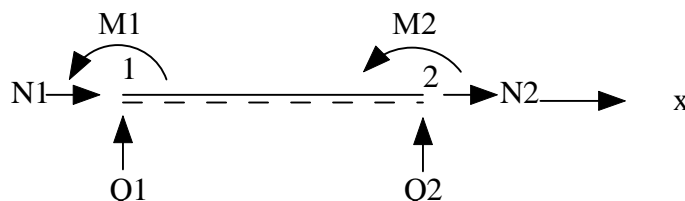


Fig 2.4

For hver knude er der følgende 3 bevægelsesmuligheder eller frihedsgrader : Knudens deformation i x-aksens retning, deformationen i y-aksens retning og endelig vinkeldrejningen af knuden. Der er således i alt for hvert element 6 frihedsgrader. Til hver frihedsgrad svarer en kraft eller reaktion. Til bevægelser i x- og y-retningen svarer normalkraft henholdsvis forskydningskraft og til vinkeldrejningen svarer et moment. Knudedeflytningerne og disses positive retninger er vist på fig. 2.3

Knudekræfterne skal forstås som de kræfter der er nødvendige for at fastholde elementet i en bestemt deformationstilstand. Knudekræfterne og disses positive retninger er vist på fig. 2.4

Idet superpositionsprincippet er gældende kan relationen mellem knudekræfter og knudedeformationer på matrixform udtrykkes således :

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \quad (2.2)$$

som udskrevet ser således ud :

$$\begin{bmatrix} N1 \\ Q1 \\ M1 \\ N2 \\ Q2 \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k11 & k12 & k13 & k14 & k15 & k16 \\ k21 & k22 & k23 & k24 & k25 & k26 \\ k31 & k32 & k33 & k34 & k35 & k36 \\ k41 & k42 & k43 & k44 & k45 & k46 \\ k51 & k52 & k53 & k54 & k55 & k56 \\ k61 & k62 & k63 & k64 & k65 & k66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ \alpha1 \\ u2 \\ v2 \\ \alpha2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{k} er som det fremgår en 6x6 matrix – den såkaldte stivhedsmatrix – og elementerne i \mathbf{k} kan findes ved enten den såkaldte direkte metode eller ved arbejdsligningen.

Bestemmelsen af den lokale stivhedsmatrix udgør en væsentlig del af arbejdet ved anvendelsen af elementmetoden og vi skal i næste afsnit se hvordan dette kan foregå.

2.2.1 Den direkte metode

Her skal først anvendes den direkte metode og ved denne sættes først $u1 = 1$ og de øvrige elementer i \mathbf{v} -vektoren = 0. Herefter sættes $v1 = 1$ og de øvrige = 0 osv. Hvert af disse 6 tilfælde betegnes som elementartilfælde.

Det skal i det følgende vises hvordan nogle af elementerne i \mathbf{k} bestemmes.

1. $u1 = 1$:

$N1$ er den kraft som skal påføres i knude 1 for at deformationen $u1 = 1$ kan optræde. Der henvises til fig. 2.5. Den deformerede bjælke er vist punkteret.

Elasticitetskoefficient, tværsnitsareal, inertimoment og længde af bjælkeelement betegnes i det følgende med E , A , I og L .

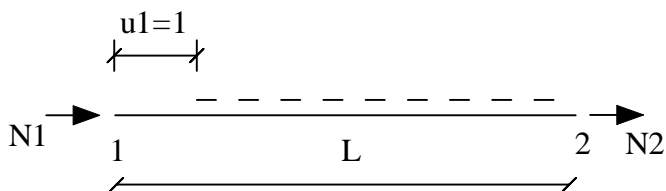


Fig 2.5

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{L} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{E}{L} \Rightarrow N_1 = \frac{E \cdot A}{L}, \quad \text{idet } N_1 = k_{11} \cdot u_1 \text{ og } u_1 = 1 \quad \text{fås } k_{11} = \frac{E \cdot A}{L}$$

For at elementet kan være i ligevægt må N_2 være lige så stor og modsat rettet N_1 . Heraf ses at

$$k_{41} = -\frac{E \cdot A}{L}$$

De øvrige elementer i v -vektoren har ingen indflydelse på aksialkræfterne og hermed bliver $k_{12}, k_{13}, k_{15}, k_{16}, k_{41}, k_{43}, k_{45}$ og $k_{46} = 0$

Herefter vises hvordan man finder k_{23}, k_{33}, k_{53} og k_{63} :

2 : $\alpha_1=1$

Hvis vi forestiller os bjælken som værende vægtløs og frit svævende i luften så skal vi bestemme de knudekræfter der skal til for at fastholde bjælken i en deformationstilstand hvor $\alpha_1 = 1$ og de øvrige elementer i v -vektoren = 0

Bidraget til M_1 er det moment som skal påføres i knude 1 for at deformationen $\alpha_1 = 1$ kan optræde. Der henvises til figur 2.6. På samme måde er bidraget til M_2 det ydre moment som er nødvendig for at vinkeldrejningen i knude 2 er = 0.

Den samlede værdi af M_1 fås ved at summere bidragene fra de 6 elementartilfælde. Dette princip anvendes for alle 6 knudekræfter.

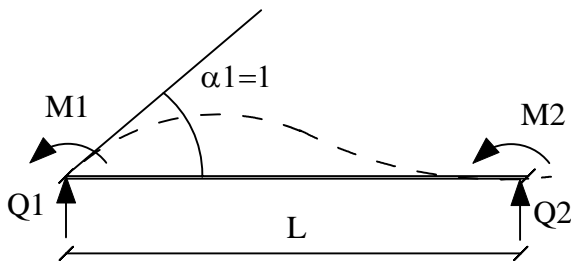


Fig 2.6

Vi vælges at anvende bjælkens differentialligning som lyder idet nedbøjningen v regnes positiv opefter og vinkeldrejningen ;regnes positiv mod uret:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \quad \frac{dv}{dx} = \alpha(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx, \quad v(x) = \int \alpha(x) dx$$

Randbetingelserne er : $\alpha = 1$ og $v = 0$ for $x = 0$ og $\alpha = 0$ $v = 0$ for $x = L$

$$M(x) = -M1 + Q1 \cdot x, \quad EI \cdot \frac{dv}{dx} = EI \cdot \alpha(x) = -M1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot Q1 \cdot x^2 + c1,$$

$$EI \cdot v(x) = -\frac{1}{2} \cdot M1 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot Q1 \cdot x^3 + c1x + c2$$

Ved anvendelse af randbetingelsen $v = 0$ for $x = 0$ fås at $c2 = 0$. Betingelsen $\alpha = 1$ for $x = 0$ giver $c1 = EI$. De sidste 2 betingelser for $x = L$ giver herefter :

$$0 = -M1 \cdot L + \frac{1}{2} \cdot Q1 \cdot L^2 + EI$$

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot M1 \cdot L^2 + \frac{1}{6} \cdot Q1 \cdot L^3 + EI \cdot L$$

Løsningerne hertil er : $M1 = \frac{4EI}{L}$ og $Q1 = \frac{6EI}{L^2}$

Ved moment om punkt 2 og lodret ligevægt fås : $M2 = \frac{2EI}{L}$ og $Q2 = -\frac{6EI}{L^2}$

Heraf ses at $k_{23} = \frac{6EI}{L^2}$, $k_{33} = \frac{4EI}{L}$, $k_{53} = -\frac{6EI}{L^2}$, $k_{63} = \frac{2EI}{L}$

3. $v2 = 1$:

Hvis vi forestiller os bjælken frit svævende i luften så skal vi bestemme de knudekræfter der skal til for at fastholde bjælken i en deformationstilstand hvor $v2 = 1$ og de øvrige elementer i v -vektoren $= 0$

Bidraget til $Q2$ er den kraft som skal påføres i knude 2 for at deformationen $v2 = 1$ kan optræde. Der henvises til figur 2.7

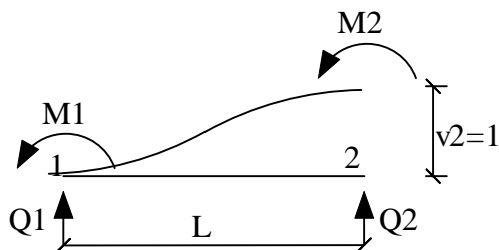


Fig 2.7

De øvrige elementer i elementets stivhedsmatrix k findes efter samme metode og alt i alt fås :

$$\begin{bmatrix} N1 \\ Q1 \\ M1 \\ N2 \\ Q2 \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 - 6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 - 6EI/L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ \alpha1 \\ u2 \\ v2 \\ \alpha2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Det bemærkes at der er symmetri omkring hoveddiagonalen.

Endvidere er det sådan at rangen af matricen k er 3. Det bemærkes at 4. række er en linearkombination af 1. række, at 5. række er en linearkombination af 2. række samt at 6. række kan fremstilles af en linearkombination af 2. og 3. række.

2.3 Transformation til globale koordinater

I den ovenfor udledte relation mellem kræfter og flytninger $\mathbf{f} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ - er det forudsat at det lokale elements x-akse følger elementets længdeakse og at y-aksen er vinkelret herpå.

For at tydeliggøre at der er tale om en relation i lokale koordinater anvendes index L og relationen skrives derfor som :

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{v}_L \quad (2.4)$$

I mange konstruktioner har de indgående elementer forskellige retninger og da vi senere får brug for at sammensætte både knudekræfter og knudflytninger for flere elementer med forskellige retninger er det nødvendigt at indføre et fælles – og dermed globalt – koordinatsystem.

Det bliver da nødvendigt at bestemme en sammenhæng mellem både kræfter og flytninger i de to koordinatsystemer.

Idet både kræfter og flytninger kan udtrykkes ved vektorer kan vi ved hjælp af fig 2.8 bestemme denne sammenhæng.

Det forudsættes at den lokale akse er drejet vinklen φ i forhold til det globale systems x-akse.

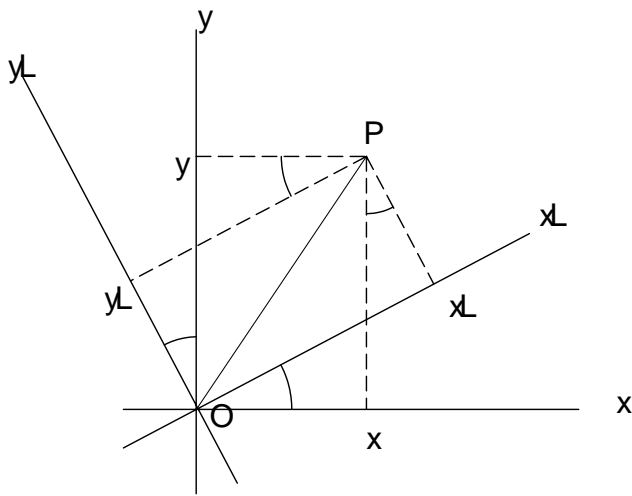


Fig 2.8

Ved rent geometriske betragtninger fås :

$$x = x_L \cos \varphi - y_L \sin \varphi, \quad y = x_L \sin \varphi + y_L \cos \varphi, \quad z = z_L$$

Vinkeldrejningen af en knude samt momentet ved en knude er uafhængig af koordinatsystemets akseretninger og repræsenteres ved koordinaten z .

På vektorform giver ovennævnte følgende relation :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Vi ønsker at udtrykke den lokale vektor \mathbf{f}_L i det globale koordinatsystem og dette gøres ved følgende transformation – hvor \mathbf{f} er vektoren i det globale system :

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{T} \cdot \mathbf{f} \quad (2.5)$$

Matricen \mathbf{T} kaldes transformationsmatricen og skrives som :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rigtigheden ses bedre hvis vi skriver relationen $\mathbf{f}_L = \mathbf{T} \cdot \mathbf{f}$ ud. Vi får :

$$\begin{bmatrix} N1L \\ Q1L \\ M1L \\ N2L \\ Q2L \\ M2L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M1 \\ Q1 \\ M1 \\ N2 \\ Q2 \\ M2 \end{bmatrix}$$

Det kan vises at $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ og hermed fås idet der indsættes i $\mathbf{f}_L = \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{v}_L$ og vi husker at ikke kun kræfter men også flytninger kan udtrykkes som vektorer :

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{T} \cdot \mathbf{f}, \text{ og } \mathbf{v}_L = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad (2.7)$$

Da vi ønsker at skrive : $\mathbf{f} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ får vi at

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{T} \quad (2.8)$$

Størrelserne $\mathbf{f}, \mathbf{v}, \mathbf{k}$ er da det enkelte elements knudekræfter, flytninger og stivhedsmatrix mht. de globale akser.

2.4 Den globale stivhedsrelation.

Den globale stivhedsrelation lyder som tidligere anført : $\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}$ og vi skal i det følgende redegøre for hvorledes denne kan opstilles.

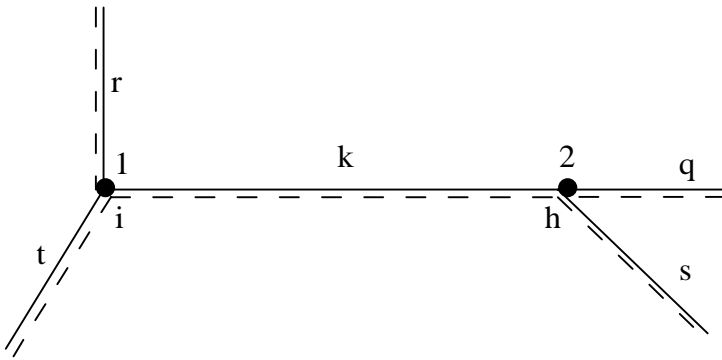


Fig 2.9

Vi betragter fig 2.9 som forestiller et udsnit af en rammekonstruktion indeholdende n elementer og m knuder. Det forudsættes at det k 'te element har sit lokale nedre knudepunkt (pkt.1) sammenfaldende med det globale systems knudepunkt i og sit lokale øvre knudepunkt (pkt.2) sammenfaldende med det globale systems knudepunkt h .

Ved det globale systems knudepunkt i har vi yderligere elementerne r og t med disses lokale øvre knudepunkter (pkt. 2) og endelig har vi ved det globale systems knudepunkt h elementerne q og s med disses lokale nedre knudepunkter (pkt. 1)

Den lokale flytningsvektor for elementet k betegnes \mathbf{v}_k og indeholder elementerne

$$\{uk1, vk1, \alpha k1, uk2, vk2, \alpha k2\}$$

Flytningsvektoren \mathbf{v}_k kan også skrives :

$$\mathbf{v}_k = \{\mathbf{v}_{k1}, \mathbf{v}_{k2}\} \text{ hvor } \mathbf{v}_{k1} = \{uk1, vk1, \alpha k1\} \text{ og } \mathbf{v}_{k2} = \{uk2, vk2, \alpha k2\}$$

Den globale flytningsvektor \mathbf{q} indeholder elementerne :

$$\{u1, v1, \alpha 1, \dots, ui, vi, \alpha i, \dots, uj, vj, \alpha j, \dots, um, vm, \alpha m\} \text{ hvor } u_i, v_i, \alpha_i \text{ er flytningerne af det } i\text{'te knudepunkt .}$$

Den globale flytningsvektor kan også skrives som :

$$\{\mathbf{q}1, \dots, \mathbf{q}i, \dots, \mathbf{q}j, \dots, \mathbf{q}m\} \text{ hvor } \mathbf{q}i = \{ui, vi, \alpha i\}$$

Sammenhængen mellem element k 's flytningsvektor (i det globale system) og den globale flytningsvektor kan udtrykkes på følgende måde :

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{q} \quad (2.9)$$

Her kaldes matricen \mathbf{A} for elementets topologimatrix. Et tilsvarende udtryk kan opskrives for hvert af de øvrige elementer og samlet kaldes disse relationer **kompatibilitetsbetingelsen** – dvs den sikrer at

deformationerne af de enkelte elements knudepunkter hvor disse er fælles for flere elementer har samme størrelse. Skrevet ud ser relationen således ud :

$$\begin{bmatrix} uk1 \\ vk1 \\ \alpha k1 \\ uk2 \\ vk2 \\ \alpha k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 000\dots 000100\dots\dots 000 \\ 000\dots 000010\dots\dots 000 \\ 000\dots 000001\dots\dots 000 \\ 000\dots 100000\dots\dots 000 \\ 000\dots 010000\dots\dots 000 \\ 000\dots 001000\dots\dots 000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ \alpha 1 \\ \cdot \\ uh \\ vh \\ \alpha h \\ \cdot \\ ui \\ vi \\ \alpha i \\ \cdot \\ um \\ vm \\ \alpha m \end{bmatrix}$$

på kort form: $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \mathbf{I} \dots \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \dots \mathbf{I} \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}$ hvor $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2.10)

Som det fremgår skal i øverste række af **A**-matricen indsættes **I**-matricen på den plads der svarer det globale nummer af det lokale elements nedre knudepunkt. På samme måde skal i nederste række af **A**-matricen indsætte **I**-matricen på den plads der svarer det globale nummer af det lokale elements øvre knudepunkt. På alle øvrige pladser indsættes **0**-matricen.

Den anden betingelse vi kan udnytte for hvert knudepunkt i det globale system er **ligevægtsbetingelserne**.

Vi ser på den globale knudekraftvektor **R**. Denne kan skrives på følgende måde :

$$\{N1, Q1, M1, \dots, Nh, Qh, Mh, \dots, Ni, Qi, Mi, \dots, Nm, Qm, Mm\}$$

Den globale knudekraftvektor vektor kan også skrives som :

$$\{\mathbf{R}1, \dots, \mathbf{R}h, \dots, \mathbf{R}i, \dots, \mathbf{R}m\} \text{ hvor } \mathbf{R}i = \{Ni, Qi, Mi\}$$

Den globale knudekraftvektor \mathbf{R} ”stykkes” sammen af bidrag fra hvert af knudepunkterne og bidraget \mathbf{R}_i bestemmes ved vandret og lodret projektion samt momentligevægt for knudepunktet. Idet der henvises til fig. 2.10 fås for knude i og h :

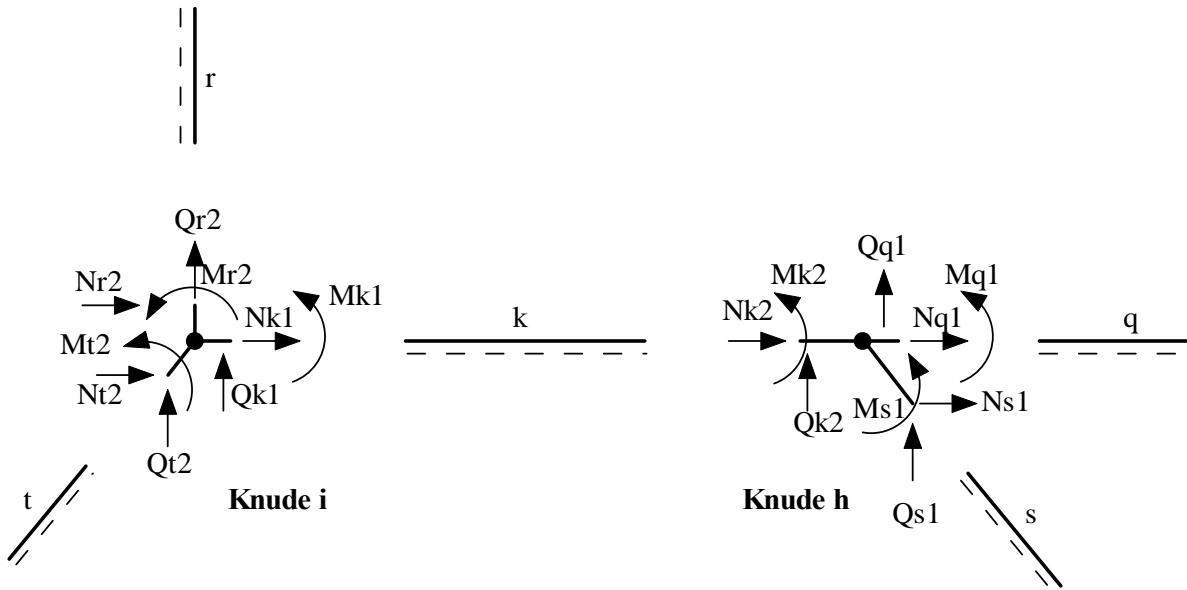


Fig 2.10

$$N_i = N_{k1} + N_{t2} + N_{r2}, \quad Q_i = Q_{k1} + Q_{t2} + Q_{r2}, \quad M_i = M_{k1} + M_{t2} + M_{r2}$$

$$N_h = N_{k2} + N_{q1} + N_{s1}, \quad Q_h = Q_{k2} + Q_{q1} + Q_{s1}, \quad M_h = M_{k2} + M_{q1} + M_{s1}$$

Disse ligninger kan også skrives på følgende måde :

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{k1} \\ Q_{k1} \\ M_{k1} \\ N_{k2} \\ Q_{k2} \\ M_{k2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{t1} \\ Q_{t1} \\ M_{t1} \\ N_{r1} \\ Q_{r1} \\ M_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{r1} \\ Q_{r1} \\ M_{r1} \\ N_{r2} \\ Q_{r2} \\ M_{r2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} N_h \\ Q_h \\ M_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{k1} \\ Q_{k1} \\ M_{k1} \\ N_{k2} \\ Q_{k2} \\ M_{k2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{q1} \\ Q_{q1} \\ M_{q1} \\ N_{q2} \\ Q_{q2} \\ M_{q2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{s1} \\ Q_{s1} \\ M_{s1} \\ N_{s2} \\ Q_{s2} \\ M_{s2} \end{bmatrix}$$

Vi får på denne måde et bidrag fra hvert element og alle bidrag adderes. Vi indfører derfor vektoren $\Delta \mathbf{R}_k$ der indeholder 3m elementer og er element k's bidrag til \mathbf{R} . Ved summation af $\Delta \mathbf{R}$ 'erne fås \mathbf{R} og $\Delta \mathbf{R}$ 'erne må derfor bringes på en sådan form at de som \mathbf{R} indeholder 3m elementer.

Det verificeres at $\Delta \mathbf{R}_k$, der som anført har 3m rækker, kan skrives på følgende måde :

$$\Delta \mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{k1} \\ Q_{k1} \\ M_{k1} \\ N_{k2} \\ Q_{k2} \\ M_{k2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{f}_k \quad (2.11)$$

Knudekraftvektoren fås herved ved summation af bidragene fra de enkelte elementer :

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k^T \cdot \mathbf{f}_k \quad (2.12)$$

Vi har tidligere – formel 2.7 – udledt følgende for det k'te element :

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{v}_k$$

og vi har endvidere (2.9):

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{q}$$

Af disse 2 ligninger fås :

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{q}$$

og hermed ved indsættelse i 2.12 :

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k^T \cdot \mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{q} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \quad (2.13)$$

hvor

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k^T \cdot \mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{A}_k \quad (2.14)$$

\mathbf{K} kaldes den globale stivhedsmatrix og ligningssystemet $\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}$ kan herefter løses som beskrevet i afsnit 2.5

Det er vanskeligt at bevare overblikket over opbygningen af \mathbf{K} og for at få en fornemmelse her vender vi et øjeblik tilbage til den lokale stivhedsrelation $\mathbf{f} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ i globale koordinater for et vilkårligt element. Denne kan skrives sådan :

$$\begin{bmatrix} N1 \\ Q1 \\ M1 \\ N2 \\ Q2 \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k11 & k12 & k13 & k14 & k15 & k16 \\ k21 & k22 & k23 & k24 & k25 & k26 \\ k31 & k32 & k33 & k34 & k35 & k36 \\ k41 & k42 & k43 & k44 & k45 & k46 \\ k51 & k52 & k53 & k54 & k55 & k56 \\ k61 & k62 & k63 & k64 & k65 & k66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ \alpha1 \\ u2 \\ v2 \\ \alpha2 \end{bmatrix}$$

Vi foretager en opdeling af \mathbf{k} i 4 submatricer på følgende måde :

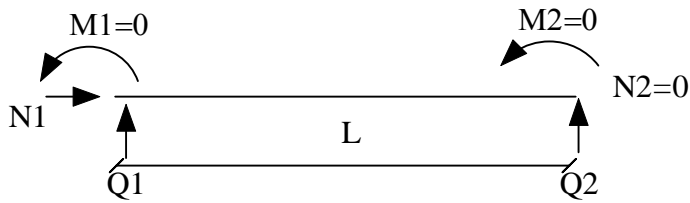


Fig 2.11

Som ubekendte i \mathbf{R} har vi her $N1, Q1, Q2$ og som kendte størrelser i \mathbf{q} har vi $u1, v1, v2$. Idet vi forudsætter at den globale stivhedsmatrix \mathbf{K} er bestemt kommer ligningssystemet til at se således ud idet de ubekendte i \mathbf{R} og de kendte i \mathbf{q} anføres som understreget tekst :

$$\begin{bmatrix} \underline{N1} \\ \underline{Q1} \\ M1 \\ N2 \\ \underline{Q2} \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u1} \\ \underline{v1} \\ \alpha1 \\ u2 \\ \underline{v2} \\ \alpha2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

De stive fjedres metode :

Denne metode går ud på at man erstatter de faste understøtninger med "uendelig" stive fjedre. I praksis gøres dette ved at vælge en fjederkonstant af størrelsen 10^{10} gange det største diagonalled. Hvis vi eksempelvis antager at k_{33} er største diagonalled får vi følgende :

$N1 = -k_{33} \cdot 10^{10} \cdot u1$, $Q1 = -k_{33} \cdot 10^{10} \cdot v1$, $Q2 = -k_{33} \cdot 10^{10} \cdot v2$ og indføres disse i ligningssystemet får vi i øverste linie :

$$(k_{1,1} + k_{3,3} \cdot 10^{10}) \cdot u1 + k_{2,1} \cdot v1 + k_{1,3} \cdot \alpha1 + k_{1,4} \cdot u2 + k_{1,5} \cdot v2 + k_{1,6} \cdot \alpha2 = 0$$

da $k_{3,3} \cdot 10^{10} \gg k_{1,1}$ kan denne skrives som:

$$k_{3,3} \cdot 10^{10} \cdot u1 + k_{2,1} \cdot v1 + k_{1,3} \cdot \alpha1 + k_{1,4} \cdot u2 + k_{1,5} \cdot v2 + k_{1,6} \cdot \alpha2 = 0$$

De øvrige ligninger i systemet der indeholder de ubekendte knudekræfter ændres efter samme princip og vi får herefter :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M1 \\ N2 \\ 0 \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k33 \cdot 10^{10} & k12 & k13 & k14 & k15 & k16 \\ k21 & k33 \cdot 10^{10} & k34 & k24 & k25 & k26 \\ k31 & k32 & k33 & k34 & k35 & k36 \\ k41 & k42 & k43 & k44 & k45 & k46 \\ k51 & k52 & k53 & k54 & k33 \cdot 10^{10} & k16 \\ k61 & k62 & k63 & k64 & k65 & k66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u1} \\ \underline{v1} \\ \alpha1 \\ u2 \\ \underline{v2} \\ \alpha2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Dette ligningssystem løses ved invertering af den modificerede stivhedsmatrix og de ubekendte knude deformationer bestemmes og til slut kan knudekræfterne bestemmes direkte af ligningssystemet (2.16)

2.6 Bjælker med charnierer

Den lokale stivhedsmatrix for et bjælkeelement er udledt i afsnit 2.1 Hvis der i konstruktionen indgår en eller flere bjælker med charnierer er man selvfølgelig nødt til at tage hensyn hertil og dette gøres gennem de lokale stivhedsmatricer for de pågældende elementer. Nedenstående er anført stivhedsmatricen for et element med 1 charniere vist på fig. 2.12 og der er vist udledningen af nogle af elementerne i matricen.

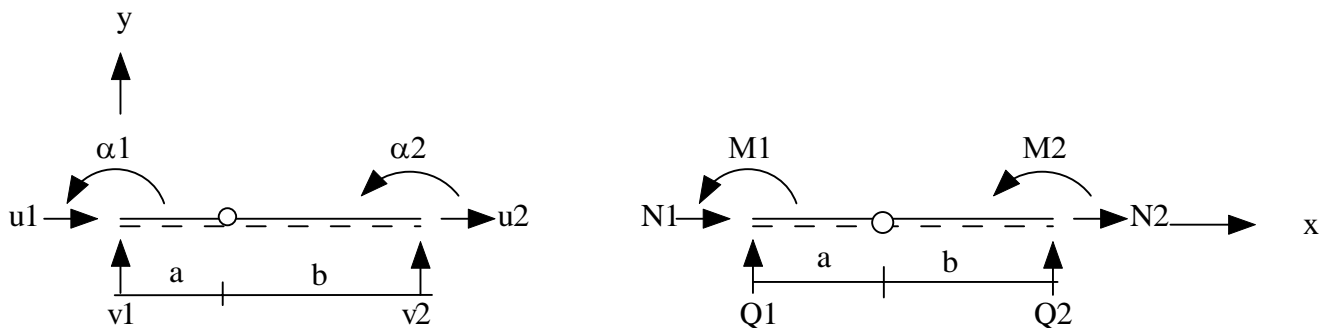


Fig 2.12

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{a^3+b^3} & \frac{3EIa}{a^3+b^3} & 0 & -\frac{3EI}{a^3+b^3} & \frac{3EIb}{a^3+b^3} \\ 0 & \frac{3EIa}{a^3+b^3} & \frac{3EIa^2}{a^3+b^3} & 0 & -\frac{3EIa}{a^3+b^3} & \frac{3EIab}{a^3+b^3} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{a^3+b^3} & -\frac{3EIa}{a^3+b^3} & 0 & \frac{3EI}{a^3+b^3} & -\frac{3EIb}{a^3+b^3} \\ 0 & \frac{3EIb}{a^3+b^3} & \frac{3EIab}{a^3+b^3} & 0 & -\frac{3EIb}{a^3+b^3} & \frac{3EIb^2}{a^3+b^3} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Det er umiddelbart indlysende at de led i den lokale stivhedsmatrix der har relation til normalkraften N er uafhængige af charnietet sådan at de er de samme som i formel [2.3]

Herefter ser vi på de øvrige elementer og betragter først en lodret flytning $v_1 = 1$:
1. $v_1 = 1$

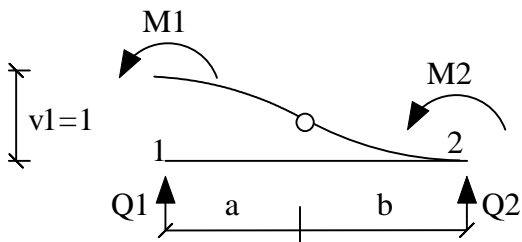


Fig 2.13

Som følge af flytningen opstår der en forskydningskraft V i charnietet og følgende udtryk for de lodrette flytninger – jf. fig 2.13 - v_a og v_b i charnietet er gældende :

$$va = \frac{1}{3} \cdot \frac{M1 \cdot a^2}{EI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{V \cdot a^3}{EI}$$

$$vb = \frac{1}{3} \cdot \frac{M2 \cdot b^2}{EI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{V \cdot b^3}{EI}$$

$$va + vb = 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{V(a^3 + b^3)}{EI} \Rightarrow V = \frac{3 \cdot EI}{a^3 + b^3}$$

Heraf fås :

$$Q1 = \frac{3 \cdot EI}{a^3 + b^3}, \quad Q2 = -\frac{3 \cdot EI}{a^3 + b^3},$$

$$M1 = \frac{3 \cdot EI}{a^3 + b^3} \cdot a, \quad M2 = \frac{3 \cdot EI}{a^3 + b^3} \cdot b$$

Herefter betragtes flytningen $\alpha_1 = 1$

$\alpha_1 = 1$:

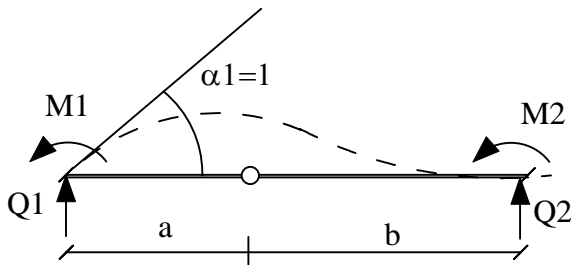


Fig 2.14

Forskydningskraften V i charnieret og M2 findes :

$$V = \frac{M1}{a}, \quad M2 = V \cdot b = \frac{M1}{a} \cdot b, \quad \text{herefter bestemmes momentkurven for bjælken som vist på fig 2.15}$$

og ved hjælp af "konjugeret bjælke" - fig 2.16. Vedr konjugeret bjælke henvises til afsnit 2.6.1

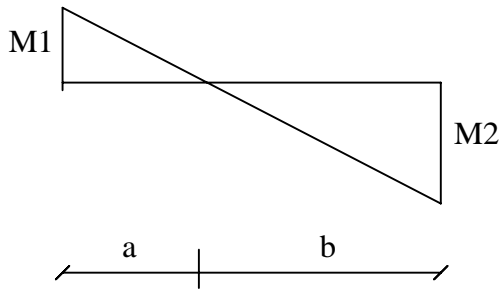


Fig 2.15

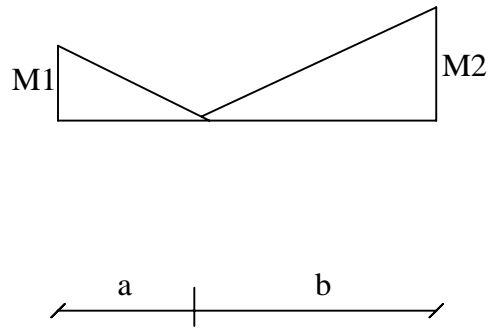


Fig 2.16

$$R1 = \left(\frac{1}{2} \cdot M1 \cdot a \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot M2 \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot b \right) \cdot \frac{1}{EI} = 1, \text{ idet vi udnytter at } M2 = M1 \cdot \frac{b}{a} \text{ findes :}$$

$$M1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3}{a^2} \right) \cdot \frac{1}{EI} = 1 \Rightarrow M1 = \frac{3 \cdot EI \cdot a^2}{a^3 + b^3}$$

for M2 fås :

$$M2 = \frac{3 \cdot EI \cdot a \cdot b}{a^3 + b^3} \quad Q2 = -\frac{3 \cdot EI \cdot a}{a^3 + b^3}$$

Det overlades til læseren at eftervise bestemmelsen af de resterende elementer i stivhedsmatricen.

2.6.1 Konjureret bjælke

Her skal kort repeteres følgende vedrørende metoden :

Metoden går ud på at moment og forskydningskraft i den konjurerede bjælke når denne belastes med krumningen i den virkelige bjælke svarer til henholdsvis nedbøjning og vinkeldrejning i den virkelige bjælke.

Den konjurerede bjælke har samme længde som den virkelige bjælke og et charnier i den virkelige bjælke svarer til en mellemunderstøtning i den konjurerede og en indspænding henholdsvis fri ende i den virkelige bjælke svarer til en fri ende henholdsvis indspænding i den konjurerede bjælke

3 Arbejds ligningen

3.1 Generelt

'Arbejds ligningen' eller 'det virtuelle arbejdes princip' (engelsk : principle of virtual work) er en meget anvendt metode i forbindelse med beregning af bærende konstruktioner.

Arbejds ligningen udspringer af termodynamikkens 1. Hovedsætning som siger at for et system i ligevægt er tilvæksten i indre energi dU lig med det summen af udført arbejde W på systemet forudsat at der ikke tilføres varme til systemet.

Vi skal her anvende arbejds ligningen til udledning af den lokale stivhedsrelation og herunder bestemmelse af elementerne i stivhedsmatricen. Udover kræfter i knuderne vil der også blive taget hensyn til lokale laster.

Vi vil her kun beskæftige os med et bjælkeelement som behandlet i de forrige afsnit men de anvendte principper er generelle og kan bruges på alle typer af konstruktionselementer, herunder eksempelvis skiver og plader.

3.2 Formfunktioner

Som anført ovenfor skal vi når arbejds ligningen anvendes beskæftige os med arbejdet der udføres af både de ydre og indre kræfter (spændinger). De ydre kræfter er knudekræfter samt eventuelle lokale laster og arbejdet udført af knudekræfter afhænger i sagens natur udover kræfternes størrelse af flytningerne af knuderne.

Arbejdet udført af de indre kræfter foregår over hele elementets udstrækning og da både de indre kræfter og flytningerne varierer langs bjælkeaksen må dette arbejde beregnes ved en integration.

Hvis vi antager at alle ydre kræfter angriber i knuderne er der en entydig sammenhæng mellem knudflytningerne og flytningerne i et vilkårligt punkt af bjælkeaksen.

Disse flytninger i et vilkårligt punkt på bjælkeaksen kan udtrykkes ved de såkaldte formfunktioner eller interpolationsfunktioner og vi vil i det følgende udlede udtrykkene for disse.

I en bjælke vil der være tale om aksialflytninger (formfunktionerne N_1 og N_4) og flytninger vinkelret på bjælkeaksen (formfunktionerne N_2, N_3, N_5, N_6). Disse 2 sæt formfunktioner er uafhængige af hinanden.

Til hver frihedsgrad i en knude hører en formfunktion $N(x)$ og funktionsværdien af denne er 1 i det punkt hvor den pågældende frihedsgrad optræder og 0 i alle andre knudepunkter.

Ideen med formfunktioner er at man da med kendskab til knudflytningerne kan finde flytningen i et vilkårligt punkt på bjælken.

Aksial- og tværflytning flytning i afstanden x fra venstre knude kan da beregnes således :

$$u(x) = N1(x) \cdot u1 + N4(x) \cdot u2 \text{ og}$$

$$w(x) = N2(x) \cdot v1 + N3(x) \cdot \alpha1 + N5(x) \cdot v2 + N6(x) \cdot \alpha2$$

Frihedsgrader med tilhørende formfunktioner :

Frihedsgrad	Formfunktion
u1	N1
v1	N2
$\alpha1$	N3
u2	N4
v2	N5
$\alpha2$	N6

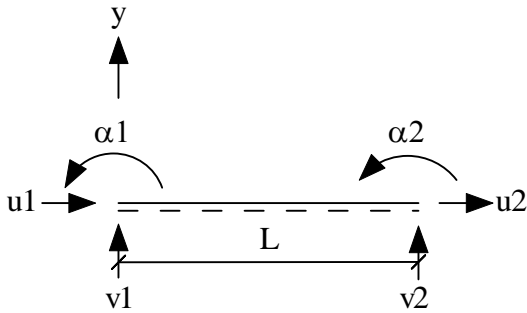


Fig 3.1

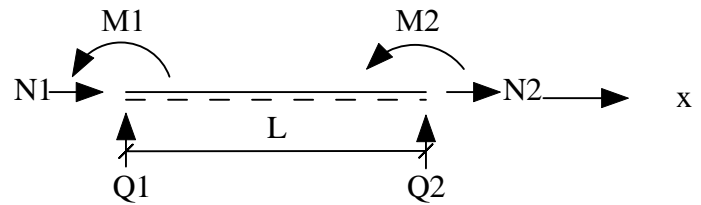


Fig 3.2

Bjælkeelementet i fig. 3.1 og 3.2 betragtes og for dette ønsker vi at bestemme formfunktionerne.

1. **Formfunktion N1(x) og N4(x)** : Disse bestemmes for henholdsvis $u1 = 1$ og $u2 = 1$

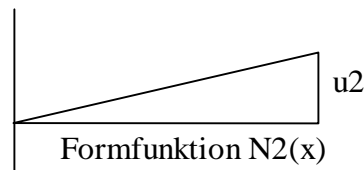
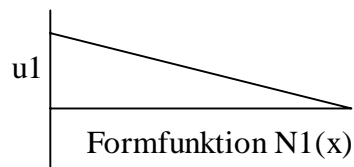


Fig 3.3 flytninger

formfunktioner

Det fremgår umiddelbart af fig. 3.3 at følgende gælder :

$$N1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad N4(x) = \frac{x}{L}$$

2. Formfunktion N2(x) : v1 = 1 :

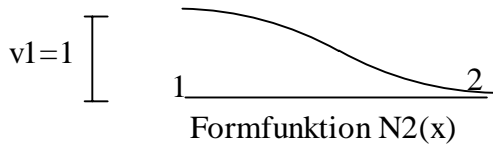


Fig 3.4 flytninger og formfunktion

Følgende 4 randbetingelser gælder :

$$x = 0 \Rightarrow N2 = 1, \quad x = 0 \Rightarrow N'2 = 0, \quad x = L \Rightarrow N2 = 0, \quad x = L \Rightarrow N'2 = 0$$

Sådanne 4 betingelser kan opfyldes af et 3' grads polynomium :

$$N2(x) = a3x^3 + a2x^2 + a1x + a0, \quad N'2(x) = 3a3x^2 + 2a2x + a1$$

Indsættes ovenstående randbetingelser fås følgende ligninger :

$$a0 = 1$$

$$a1 = 0$$

$$a3L^3 + a2L^2 + a1L + a0 = 0$$

$$3a3L^2 + 2a2L + a1 = 0$$

Løsningen til disse ligninger er følgende :

$$a3 = \frac{2}{L^3}, \quad a2 = -\frac{3}{L^2}$$

Herefter kan N2(x) skrives som :

$$N2(x) = \frac{2}{L^3}x^3 - \frac{3}{L^2}x^2 + 1$$

3. Formfunktion $N_3(x)$: $\alpha_1 = 1$:

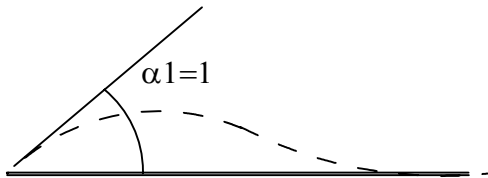


Fig 3.5 flytninger og formfunktion

Følgende 4 randbetingelser gælder :

$$x = 0 \Rightarrow N_2 = 0, \quad x = 0 \Rightarrow N'_2 = 1, \quad x = L \Rightarrow N_2 = 0, \quad x = L \Rightarrow N'_2 = 0$$

Sådanne 4 betingelser kan opfyldes af et 3' grads polynomium :

$$N_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad N'_2(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

Indsættes ovenstående randbetingelser fås følgende ligninger :

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_3L^3 + a_2L^2 + a_1L + a_0 = 0$$

$$3a_3L^2 + 2a_2L + a_1 = 0$$

Løsningen til disse ligninger er følgende :

$$a_3 = \frac{1}{L^2}, \quad a_2 = -\frac{2}{L}$$

Herefter kan $N_3(x)$ skrives som :

$$N_3(x) = \frac{1}{L^2}x^3 - \frac{2}{L}x^2 + x$$

På tilsvarende kan vi finde $N_5(x)$ og $N_6(x)$ ved at sætte henholdsvis $\nu_2 = 1$ og $\alpha_2 = 1$.

Vi får :

$$N_5(x) = -\frac{2}{L^3}x^3 + \frac{3}{L^2}x^2$$

$$N6(x) = \frac{1}{L^2}x^3 - \frac{1}{L}x^2$$

Alt i alt kan de 6 formfunktioner altså skrives sådan :

$$N1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad N4(x) = \frac{x}{L} \quad (3.1)$$

$$N2(x) = \frac{2}{L^3}x^3 - \frac{3}{L^2}x^2 + 1 \quad (3.2)$$

$$N3(x) = \frac{1}{L^2}x^3 - \frac{2}{L}x^2 + x \quad (3.3)$$

$$N5(x) = -\frac{2}{L^3}x^3 + \frac{3}{L^2}x^2 \quad (3.4)$$

$$N6(x) = \frac{1}{L^2}x^3 - \frac{1}{L}x^2 \quad (3.5)$$

Ved bestemmelse af formfunktioner kan anvendes en mere systematisk fremgangsmåde som skal beskrives i det følgende idet vi kun vil beskæftige os med tværflytninger.

Som ovenfor anført kan de 4 betingelser som hver formfunktion skal opfylde på entydig måde tilfredsstilles af et 3'gradspolynomium – dvs :

$$N2(x) = c11 + c21 \cdot x + c31 \cdot x^2 + c41 \cdot x^3$$

$$N3(x) = c12 + c22 \cdot x + c32 \cdot x^2 + c42 \cdot x^3$$

$$N5(x) = c13 + c23 \cdot x + c33 \cdot x^2 + c43 \cdot x^3$$

$$N6(x) = c14 + c24 \cdot x + c34 \cdot x^2 + c44 \cdot x^3$$

eller :

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{g} \quad (3.6)$$

hvor :

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} c11 & c21 & c31 & c41 \\ c12 & c22 & c32 & c42 \\ c13 & c23 & c33 & c43 \\ c14 & c24 & c34 & c44 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Om N2 vides følgende : $N2(0)=1$, $N2'(0)=0$, $N2(L)=0$, $N2'(L)=0$

Disse 4 betingelser giver følgende ligningssystem :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c11 \\ c21 \\ c31 \\ c41 \end{bmatrix}$$

For N3, N5, N6 kan opstilles tilsvarende ligningssystemer :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c12 \\ c22 \\ c32 \\ c42 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c13 \\ c23 \\ c33 \\ c43 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c14 \\ c24 \\ c34 \\ c44 \end{bmatrix}$$

Disse ligninger kan samles i følgende :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \quad \text{eller: } \mathbf{I} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{C}$$

C matricen kan da findes ved : $\mathbf{C} = \mathbf{h}^{-1}$ (3.7)

Det skal anføres, at de fundne formfunktioner er exacte hvilket er et særtilfælde for bjælker og ikke gældende ved de konstruktionselementer (skiver og plader) som vi senere skal beskæftige os med. Når det gælder for bjælker hænger det sammen med at deformationsfiguren for en bjælke når denne kun er belastet i knudepunkterne netop kan beskrives af et 3' grads polynomium. Altså gælder formfunktionerne principielt ikke ved laster mellem knudepunkterne.

3.3 Flytningsinterpolationsmatricen

De 6 formfunktioner samles i matricen \mathbf{N} kaldet flytningsinterpolationsmatricen :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N1 & 0 & 0 & N4 & 0 & 0 \\ 0 & N2 & N3 & 0 & N5 & N6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}u \\ \mathbf{N}v \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Flytningen af et vilkårligt punkt på bjælken i x-aksens retning (u) og vinkelret derpå (w) samles i vektoren \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{bmatrix}$$

Flytningen af bjælkens endepunkter er samlet i vektoren \mathbf{v} således :

$$\mathbf{v} = \{u1, v1, \alpha1, u2, v2, \alpha2\}$$

Hermed kan \mathbf{u} udtrykkes på følgende måde :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \quad \text{og} \quad (3.9)$$

$$u(x) = \mathbf{N}u(x) \cdot \mathbf{v}, \quad w(x) = \mathbf{N}v(x) \cdot \mathbf{v}$$

Vi indfører nu vektoren \mathbf{e} der som 1.koordinat har tøjningen af bjælkeelementet i længdeaksens retning og som 2.koordinat krumningen af bjælken – dvs :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(x) \\ w''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{N}u(x) \cdot \mathbf{v})' \\ (\mathbf{N}v(x) \cdot \mathbf{v})'' \end{bmatrix} \text{ som da } \mathbf{v} \text{ er konstant} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'u(x) \\ \mathbf{N}''v(x) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$$

\mathbf{e} kaldes den generaliserede tøjning og på samme måde kan indføres den generaliserede spænding :

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \text{ og den generaliserede stivhed : } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

3.4 Tøjningsinterpolationsmatricen.

Matricen \mathbf{B} der kaldes tøjningsinterpolationsmatricen får da følgende udseende :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}u \\ \mathbf{B}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N'1 & 0 & 0 & N'4 & 0 & 0 \\ 0 & N''2 & N''3 & 0 & N''5 & N''6 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

hvor :

$$N'1(x) = -\frac{1}{L} \quad N'4(x) = \frac{1}{L} \quad N''2(x) = \frac{12}{L^3} \cdot x - \frac{6}{L^2}$$

$$N''3(x) = \frac{6}{L^2} \cdot x - \frac{4}{L} \quad N''5(x) = -\frac{12}{L^3} \cdot x + \frac{6}{L^2} \quad N''6(x) = \frac{6}{L^2} \cdot x - \frac{2}{L}$$

3.5 Udlledning af stivhedsmatricen

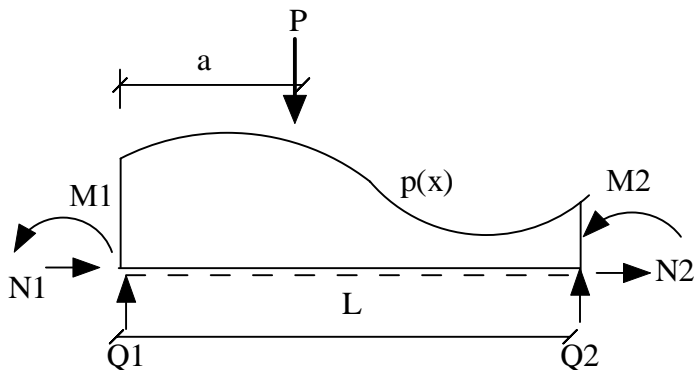


Fig 3.6

Vi ser nu på fig. 3.6 der viser et bjælkeelement med de 3 knudekræfter i hver ende samt den kontinuerlige belastning $p(x)$ og enkeltkraften P placeret i afstanden a fra venstre understøtning. Flytningerne af bjælken hidrørende fra den ydre last beskrives ved $\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{v}$. Snitkræfterne i bjælken er normalkraften N , forskydningskraften Q og momentet M . N og M kan udtrykkes på følgende måde :

$$N(x) = \sigma(x) \cdot A = \varepsilon(x) \cdot EA = \mathbf{N}'u(x) \cdot \mathbf{v} \cdot EA$$

$$M(x) = \kappa(x) \cdot EI = \frac{d^2w}{dx^2} \cdot EI = \mathbf{N}''v(x) \cdot \mathbf{v} \cdot EI$$

I den deformerede tilstand gives knuderne 1 og 2 begge en lille deformation svarende til vektoren $\delta\mathbf{v}$.

$$\delta\mathbf{v} = \{\delta u_1, \delta v_1, \delta\alpha_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta\alpha_2\}$$

Som følge af den ydre påtrykte deformation vil ethvert punkt i bjælken opleve en tilsvarende lille flytnings- og tøjningstilvækst i x -aksens retning og vinkelret derpå. På samme måde vil de enkelte snit i bjælken få en lille tilvækst i krumningen.

Flytnings-, tøjnings- og krumningstilvækster af et vilkårligt punkt kan skrives på følgende måde :

$$\delta\varepsilon(x) = \mathbf{N}'u \cdot \delta\mathbf{v} = \mathbf{B}u \cdot \delta\mathbf{v}$$

$$\delta\kappa(x) = \mathbf{N}''v \cdot \delta\mathbf{v} = \mathbf{B}v \cdot \delta\mathbf{v}$$

$$\delta w(x_0) = \mathbf{N}v(x_0) \cdot \delta\mathbf{v}$$

Vi ser nu på det ydre arbejde δW og tilvæksten i den indre energi δU ved flytningen $\delta\mathbf{v}$.

Det ydre arbejde δW forårsaget af knudekraftvektoren \mathbf{f} , den kontinuerlige last $p(x)$ samt enkeltkraften P kan skrives som :

$$\delta W = \delta\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{f} + \int_0^L \delta\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{N}v^T(x) \cdot p(x)dx + \delta\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{N}v^T(x_0) \cdot P \quad (3.11)$$

Den tilsvarende tilvækst i indre energi δU kan bestemmes som arbejdet udført af normalsnitkraften $N(x)$ samt arbejdet udført af snitmomentet $M(x)$. Det bemærkes at der ses bort fra arbejdet udført af forskydningskraften $Q(x)$ idet forskydningsdeformationerne regnes små i forhold til de øvrige bidrag. Herefter fås :

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_0^L N(x) \cdot \delta \varepsilon(x) dx + \int_0^L M(x) \cdot \delta \kappa(x) dx = \int_0^L \varepsilon(x) \cdot EA \cdot \delta \varepsilon(x) dx + \int_0^L w''(x) \cdot EI \cdot \delta \kappa(x) dx = \\
&\int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{N}' u^T \cdot EA \cdot \mathbf{N}' u \cdot \mathbf{v} \cdot dx + \int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{N}'' v^T \cdot EI \cdot \mathbf{N}'' v \cdot \mathbf{v} dx = \\
&\int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B} u^T \cdot EA \cdot \mathbf{B} u \cdot \mathbf{v} dx + \int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B} v^T \cdot EI \cdot \mathbf{B} v \cdot \mathbf{v} dx \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Ved sammenligning af 3.11 og 3.12 ses at vi kan forkorte med $\delta \mathbf{v}^T$ hvorefter vi ved at sætte de 2 udtryk lig med hinanden får :

$$\mathbf{f} + \int_0^L \mathbf{N} v^T(x) \cdot p(x) dx + \mathbf{N} v^T(x_0) \cdot P = \int_0^L \mathbf{B} u^T \cdot EA \cdot \mathbf{B} u \cdot \mathbf{v} dx + \int_0^L \mathbf{B} v^T \cdot EI \cdot \mathbf{B} v \cdot \mathbf{v} dx \quad (3.13)$$

Vi indfører følgende : $\int_0^L \mathbf{N} v^T(x) \cdot p(x) dx = \mathbf{f}_p$ og $\mathbf{N} v^T(x_0) \cdot P = \mathbf{f}_P$ hvorefter venstresiden af (3.13) ser således ud :

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_P$$

$$\text{Herefter ser vi på højresiden af (3.13) : } \int_0^L \mathbf{B} u^T \cdot EA \cdot \mathbf{B} u \cdot \mathbf{v} dx + \int_0^L \mathbf{B} v^T \cdot EI \cdot \mathbf{B} v \cdot \mathbf{v} dx \quad (3.14)$$

Vi indfører herefter \mathbf{k} defineret ved :

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B} u^T \cdot EA \cdot \mathbf{B} u dx + \int_0^L \mathbf{B} v^T \cdot EI \cdot \mathbf{B} v dx \quad (3.15)$$

$$\text{eller ved indførelse af den generaliserede stivhed } \mathbf{E} : \quad \mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dx$$

sådan at (3.14) kan skrives som : $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ idet \mathbf{v} er en konstant som går udenfor ved integration hvorefter vi har :

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_P = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \quad (3.16)$$

Vi husker at \mathbf{B} er defineret således :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}u \\ \mathbf{B}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N'1 & 0 & 0 & N'4 & 0 & 0 \\ 0 & N''2 & N''3 & 0 & N''5 & N''6 \end{bmatrix}$$

Vi bestemmer produktet $\mathbf{B}u^T \cdot \mathbf{B}u$ og skriver det for overskuelighedens skyld ud :

$$\begin{bmatrix} N'1 \\ 0 \\ 0 \\ N'4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [N'1 \ 0 \ 0 \ N'4 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} N'1 \cdot N'1 & 0 & 0 & N'1 \cdot N'4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N'4 \cdot N'1 & 0 & 0 & N'4 \cdot N'4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Vi skriver ligeledes produktet $\mathbf{B}v^T \cdot \mathbf{B}v$ ud :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ N''2 \\ N''3 \\ 0 \\ N''5 \\ N''6 \end{bmatrix} \cdot [0 \ N''2 \ N''3 \ 0 \ N''5 \ N''6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N''2 \cdot N''2 & N''2 \cdot N''3 & 0 & N''2 \cdot N''5 & N''2 \cdot N''6 \\ 0 & N''3 \cdot N''2 & N''3 \cdot N''3 & 0 & N''3 \cdot N''5 & N''3 \cdot N''6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N''5 \cdot N''2 & N''5 \cdot N''3 & 0 & N''5 \cdot N''5 & N''5 \cdot N''6 \\ 0 & N''6 \cdot N''2 & N''6 \cdot N''3 & 0 & N''6 \cdot N''5 & N''6 \cdot N''6 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Vi summerer 3.17 og 3.18, indfører EA og EI og integrerer og får derefter :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \int_0^L N'1 \cdot N'1 \cdot EAdx & 0 & 0 & \int_0^L N'1 \cdot N'4 \cdot EAdx & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L N''2 \cdot N''2 \cdot EIdx & \int_0^L N''2 \cdot N''3 \cdot EIdx & 0 & \int_0^L N''2 \cdot N''5 \cdot EIdx & \int_0^L N''2 \cdot N''6 \cdot EIdx \\ 0 & \int_0^L N''3 \cdot N''2 \cdot EIdx & \int_0^L N''3 \cdot N''3 \cdot EIdx & 0 & \int_0^L N''3 \cdot N''5 \cdot EIdx & \int_0^L N''3 \cdot N''6 \cdot EIdx \\ \int_0^L N'1 \cdot N'1 \cdot EAdx & 0 & 0 & \int_0^L N'4 \cdot N'4 \cdot EAdx & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L N''5 \cdot N''2 \cdot EIdx & \int_0^L N''5 \cdot N''3 \cdot EIdx & 0 & \int_0^L N''5 \cdot N''5 \cdot EIdx & \int_0^L N''5 \cdot N''6 \cdot EIdx \\ 0 & \int_0^L N''6 \cdot N''2 \cdot EIdx & \int_0^L N''6 \cdot N''3 \cdot EIdx & 0 & \int_0^L N''6 \cdot N''5 \cdot EIdx & \int_0^L N''6 \cdot N''6 \cdot EIdx \end{bmatrix} \quad 3.1$$

9

Vi prøver at beregne et enkelt af elementerne i \mathbf{k} :

$$\begin{aligned}
k_{23} &= \int_0^L N''2 \cdot N''3 \cdot EIdx = \int_0^L \left(\frac{12}{L^3} \cdot x - \frac{6}{L^2} \right) \cdot \left(\frac{6}{L^2} \cdot x - \frac{4}{L} \right) \cdot EIdx = \\
&= \int_0^L \left(\frac{72}{L^5} \cdot x^2 - \frac{48}{L^4} \cdot x + \frac{36}{L^4} \cdot x + \frac{24}{L^3} \right) \cdot EIdx = \left[\left(\frac{24}{L^5} \cdot x^3 - \frac{42}{L^4} \cdot x^2 + \frac{24}{L} \cdot x \right) \cdot EI \right]_0^L = \\
&= \left(\frac{24}{L^2} - \frac{42}{L^2} + \frac{24}{L^2} \right) \cdot EI = \frac{6}{L^2} \cdot EI
\end{aligned}$$

Det ses at resultatet er i overensstemmelse med det tidligere i afsnit 2.2 fundne udtryk 2.3.

3.6 Hensyn til lokallaster

Vi ser på udtrykkene for \mathbf{fp} og \mathbf{fP} :

$$\int_0^L N_V(x) \cdot p(x) dx = \mathbf{fp} \quad \text{og} \quad N_V(x_0) \cdot P = \mathbf{fP}$$

Da vi er bundet til at alle kræfter skal angribe i knuderne er vi nødt til at ækvivalere lokallaster med knudekræfter.

\mathbf{fp} og \mathbf{fP} er begge vektorer bestående af ækvivalente knudekræfter, hvilket vil sige knudekræfter der er af en sådan størrelse at de giver nedbøjninger og vinkeldrejninger der er lig med nedbøjninger og vinkeldrejninger fra lokallasterne $p(x)$ og P .

Dette indses på følgende måde idet vi nøjes med at se på \mathbf{fp} :

Vi antager at nedbøjningerne vinkeldrejningerne i henholdsvis nedre og øvre knude hidrørende fra lokallasten $p(x)$ er følgende : $v_1, \alpha_1, v_2, \alpha_2$ idet v betegner nedbøjning og α vinkeldrejning. Knudekræfterne som skal være ækvivalente med den ydre last benævnes Q_1, M_1, Q_2, M_2 og ved de nævnte flytninger skal arbejdet udført af knudekræfterne på grund af ækvivalensen være lig med arbejdet udført af lokallasten..

Arbejde udført af knudekraft Q_1 : $W_{Q1} = Q_1 \cdot v_1$

Arbejde udført af lokallast som følge af flytning v_1 : $W_p = \int_0^L N_2(x) \cdot v_1 \cdot p(x) dx$

Da $W_{Q1} = W_p$ får vi at : $Q_1 = \int_0^L N_2(x) \cdot p(x) dx$

Samme fremgangsmåde kan anvendes på de øvrige knudflytninger og knudekræfter.

Der er flere fordele ved at udlede den lokale stivhedsrelation ved hjælp af arbejdsligningen fremfor ved den direkte metode.

Det ses at EI indgår under integrationstegnet således at der er mulighed for at tage højde for eksempelvis et varierende tværsnit.

Ligeledes ses at der kan tages hensyn til lokallast på en enkel og direkte måde

Det skal påpeges at de anvendte formfunktioner kun er exacte for det tilfælde at EI er konstant over hele elementet og at kræfterne angriber i knuderne men den unøjagtighed man indfører ved også at anvende dem for varierende EI og lokallaster er normalt ikke større end hvad der er acceptabelt for almindelig ingeniørpraksis og unøjagtigheden kan reduceres ved anvendelse af et større antal elementer.

3.7 Bjælke på lineærelastisk underlag

I dette afsnit skal det vises hvordan man ved hjælp af arbejdsligningen på en enkel måde kan udlede stivhedsmatricen for en bjælke på et lineært elastisk underlag.

Denne type bjælker forekommer bl. a. ved fundamentsbjælker hvilende på jorden idet jorden da med tilnærmelse betragtes som værende lineærelastisk.

Man anvender da ballastteorien ifølge hvilken der er en lineær sammenhæng mellem kontakttrykket i fundamentsfladen og den tilhørende deformation. Dvs :

$$p_s = k_s \cdot w \quad (3.20)$$

Her er p_s kontakttrykket, k ballasttallet og w deformationen af bjælke og underlag.

Det bemærkes at det er en forudsætning at der både kan optages tryk og træk i kontaktfladen hvilket ved fundamenter er en tilnærmelse som ikke altid kan opfyldes.

I 3.20 er p_s kraften pr arealenhed og da det er mere praktisk at regne med kraft pr længde af bjælken ganges igennem med bjælkens bredde B hvorved fås :

$$p_s \cdot B = k_s \cdot w \cdot B \quad \text{eller} \quad p_r = k \cdot w \quad \text{hvor} \quad p_r = p_s \cdot B \quad \text{og} \quad k = k_s \cdot B$$

p_r og w er begge funktioner sådan at vi kan skrive :

$$p_r(x) = k \cdot w(x) \quad \text{Det bemærkes at } p_r \text{ og } w \text{ altid vil være modsatrettede.}$$

Vi betragter fig 3.7 som svarer til fig 3.6 blot er der nu også en belastning på undersiden af bjælken.

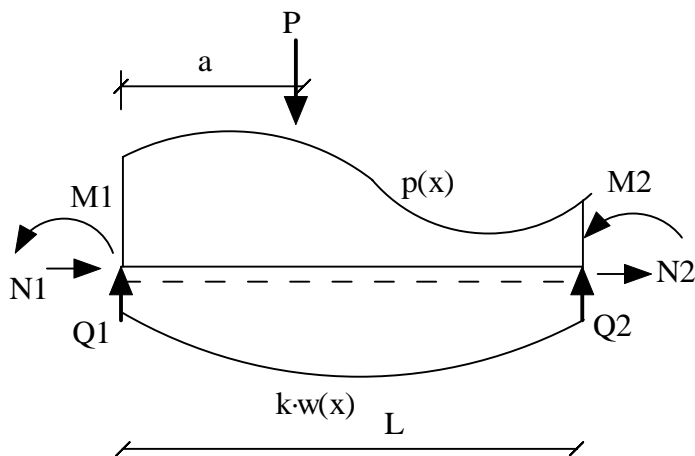


Fig 3.7

Vi har tidligere set på det ydre arbejde δW ved flytningen δv – udtrykket 3.3 og vi får hertil et ekstra bidrag fra belastningen på undersiden af bjælken. Da denne belastning altid vil være modsat rettet flytningen vil bidraget til det samlede ydre arbejde være negativt. Herefter kan det ydre arbejde skrives som :

$$\delta W = \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{f} + \int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x) \cdot p(x) dx + \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x_0) \cdot P - \int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x) \cdot k \cdot w(x) dx \quad (3.21)$$

Der er ingen ændring i udtrykket for det indre arbejde som er anført i 3.4 og gengivet nedenfor i 3.22:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L N(x) \cdot \delta \varepsilon(x) dx + \int_0^L M(x) \cdot \delta \kappa(x) dx = \int_0^L \varepsilon(x) \cdot EA \cdot \delta \varepsilon(x) dx + \int_0^L w''(x) \cdot EI \cdot \delta \kappa(x) dx = \\ &= \int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{N}' \mathbf{u}^T \cdot EA \cdot \mathbf{N}' \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot dx + \int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{N}'' \mathbf{v}^T \cdot EI \cdot \mathbf{N}'' \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx = \\ &= \int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}^T \cdot EA \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_0^L \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B} \mathbf{v}^T \cdot EI \cdot \mathbf{B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx \quad (3.22) \end{aligned}$$

Ved at sætte 3.21 lig med 3.22 og bortforkorte med $\delta \mathbf{v}^T$ får vi følgende :

$$\mathbf{f} + \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x) \cdot p(x) dx + \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x_0) \cdot P - \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x) \cdot k \cdot w(x) dx = \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{u}^T \cdot EA \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{v}^T \cdot EI \cdot \mathbf{B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx \quad (3.23)$$

Vi husker – jf 3.2 – at $w(x) = \mathbf{N} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{v}$ og hvis vi indfører dette i 3.23 får vi :

$$\mathbf{f} + \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x) \cdot p(x) dx + \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x_0) \cdot P = \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x) \cdot k \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{v} dx + \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{u}^T \cdot EA \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{v}^T \cdot EI \cdot \mathbf{B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx$$

Vi har tidligere indført : $\int_0^L \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x) \cdot p(x) dx = \mathbf{f} p$ og $\mathbf{N} \mathbf{v}^T(x_0) \cdot P = \mathbf{f} P$ hvorefter venstresiden ser således ud :

$$\mathbf{f} + \mathbf{f} p + \mathbf{f} P$$

$$\text{Herefter ser vi på højresiden : } \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{u}^T \cdot EA \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{v}^T \cdot EI \cdot \mathbf{B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx + \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x) \cdot k \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{v} dx$$

Vi har tidligere defineret :

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{u}^T \cdot EA \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} dx + \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{v}^T \cdot EI \cdot \mathbf{B} \mathbf{v} dx \quad \text{og} \quad \text{definerer nu} \quad \mathbf{kr} = \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{v}^T(x) \cdot k \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{v} dx$$

sådan at 3.23 kan skrives som : $\mathbf{f} + \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_P = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{kr} \cdot \mathbf{v}$ (3.24)

Vi skriver herefter udtrykket for \mathbf{kr} ud hvorved vi får idet k er konstant :

$$\mathbf{kr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L k \cdot N2 \cdot N2 dx & \int_0^L k \cdot N2 \cdot N3 dx & 0 & \int_0^L k \cdot N2 \cdot N5 dx & \int_0^L k \cdot N2 \cdot N6 dx \\ 0 & \int_0^L k \cdot N3 \cdot N2 dx & \int_0^L k \cdot N3 \cdot N3 dx & 0 & \int_0^L k \cdot N3 \cdot N5 dx & \int_0^L k \cdot N3 \cdot N6 dx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L k \cdot N5 \cdot N2 dx & \int_0^L k \cdot N5 \cdot N3 dx & 0 & \int_0^L k \cdot N5 \cdot N5 dx & \int_0^L k \cdot N5 \cdot N6 dx \\ 0 & \int_0^L k \cdot N6 \cdot N2 dx & \int_0^L k \cdot N6 \cdot N3 dx & 0 & \int_0^L k \cdot N6 \cdot N5 dx & \int_0^L k \cdot N6 \cdot N6 dx \end{bmatrix}$$

Vi beregner et par af elementerne i \mathbf{kr} matricen idet mellemregningerne overspringes :

$$kr_{23} = \int_0^L k \cdot N2 \cdot N3 dx = k \cdot \int_0^L \left(\frac{2}{L^3} x^3 - \frac{3}{L^2} x^2 + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{L^2} x^3 - \frac{2}{L} x^2 + x \right) dx = \frac{11}{210} \cdot k \cdot L^2$$

$$kr_{36} = \int_0^L k \cdot N3 \cdot N6 dx = k \cdot \int_0^L \left(\frac{1}{L^2} x^3 - \frac{2}{L} x^2 + x \right) \cdot \left(\frac{1}{L^2} x^3 - \frac{1}{L} x^2 \right) dx = -\frac{1}{140} \cdot k \cdot L^3$$

Alt i alt får \mathbf{kr} hermed følgende udseende :

$$\mathbf{kr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} \cdot k \cdot L & \frac{11}{210} \cdot k \cdot L^2 & 0 & \frac{9}{70} \cdot k \cdot L & -\frac{13}{420} \cdot k \cdot L^2 \\ 0 & \frac{11}{210} \cdot k \cdot L^2 & \frac{1}{105} \cdot k \cdot L^3 & 0 & \frac{13}{420} \cdot k \cdot L^2 & -\frac{1}{140} \cdot k \cdot L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} \cdot k \cdot L & \frac{13}{420} \cdot k \cdot L^2 & 0 & \frac{13}{35} \cdot k \cdot L & -\frac{11}{210} \cdot k \cdot L^2 \\ 0 & -\frac{13}{420} \cdot k \cdot L^2 & -\frac{1}{140} \cdot k \cdot L^2 & 0 & -\frac{11}{210} \cdot k \cdot L^2 & \frac{1}{105} \cdot k \cdot L^3 \end{bmatrix}$$

