Her skal du lære om

1. Helt simple determinanter
2. En udvidelse der vil noget
3. Effektive regneregler
4. Genkend determinant nul
5. Produktreglen
6. Inversreglen
7. Potensreglen
8. Entydig løsning

Eksempler

Determinanten af en kvadratisk matrix

Eksempler

Determinanten af en kvadratisk matrix

- 1-matrix

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Eksempler

Determinanten af en kvadratisk matrix

- 1-matrix

$$\left| a_{11} \right| = a_{11}$$

- 2-matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Eksempler

Determinanten af en kvadratisk matrix

- 1-matrix

$$\left|a_{11}\right| = a_{11}$$

- 2-matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 3-matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

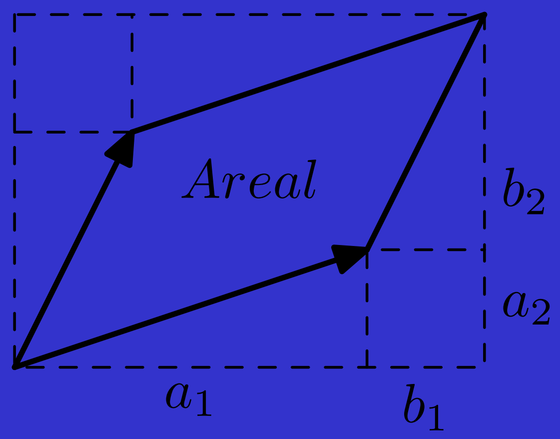
Eksempler

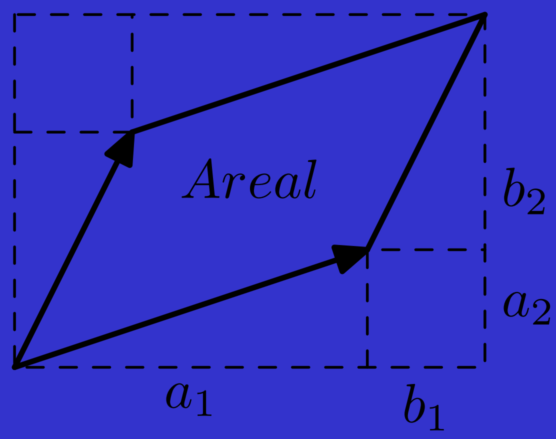
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 - 2\cdot 3 = -10$$

Eksempler

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 - 2\cdot 3 = -10$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 1\cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (5\cdot 0 - 6\cdot 3) - 2(4\cdot 0 - 6\cdot 2) \\
&\quad +3(4\cdot 3 - 5\cdot 2) \\
&= -18 + 24 + 6 \\
&= 12
\end{aligned}$$


$Areal$
b_2
a_2
a_1
b_1



$$
\begin{aligned}
Areal &= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - a_1 a_2 - b_1 b_2 - 2a_2 b_1 \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Definition

Lad $\mathbf{A}_{ij}$ være den $(m-1) \times (n-1)$-matrix, der fremkommer ved at slette i-te række og j-te søjle i en $m \times n$-matrix $\mathbf{A}$.

Definition

Lad $\mathbf{A}_{ij}$ være den $(m-1) \times (n-1)$-matrix, der fremkommer ved at slette i-te række og j-te søjle i en $m \times n$-matrix $\mathbf{A}$.

Determinanten af en kvadratisk n-matrix $\mathbf{A}$ er givet ved rækkeudvikling efter i-te række

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|$$

Definition

Lad $\mathbf{A}_{ij}$ være den $(m-1)\times(n-1)$-matrix, der fremkommer ved at slette i-te række og j-te søjle i en $m \times n$-matrix $\mathbf{A}$.

Determinanten af en kvadratisk n-matrix $\mathbf{A}$ er givet ved rækkeudvikling efter i-te række

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|$$

Kan skrives

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+1} a_{i1} |\mathbf{A}_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |\mathbf{A}_{i2}| + \cdots$$

- Determinanten kan beregnes ved søjleudvikling

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|$$

- Determinanten kan beregnes ved søjleudvikling

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|$$

- Determinanten er uafhængig af valgt række/søjle.

- Determinanten kan beregnes ved søjleudvikling

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|$$

- Determinanten er uafhængig af valgt række/søjle.
- Eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{12} = \begin{pmatrix} - & * & - \\ 4 & | & 6 \\ 7 & | & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Eksempel 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

0-*række/søjle*

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

0-række/søjle

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Øvre trekantsmatrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- Ombytning af to rækker:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

- Ombytning af to rækker:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

- Multiplikation af række med tal $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} = r$$

- Ombytning af to rækker:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

- Multiplikation af række med tal $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} = r$$

- Addition af et multiplum af en række til en anden:

$$\begin{vmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Beregning af determinant

Beregning af determinant

- Ombytning af to rækker:
  Determinanten skifter fortegn

Beregning af determinant

- Ombytning af to rækker:
  Determinanten skifter fortegn
- Multiplikation af række med tal:
  Determinanten multipliceres med samme tal

Beregning af determinant

- Ombytning af to rækker:
  Determinanten skifter fortegn
- Multiplikation af række med tal:
  Determinanten multipliceres med samme tal
- Addition af et multiplum af en række til en anden:
  Determinanten er uændret

Beregning af determinant

Beregning af determinant

- Ombytning af to søjler:
  Determinanten skifter fortegn

Beregning af determinant

- Ombytning af to søjler:
  Determinanten skifter fortegn
- Multiplikation af søjle med tal:
  Determinanten multipliceres med samme tal

Beregning af determinant

- Ombytning af to søjler:
  Determinanten skifter fortegn
- Multiplikation af søjle med tal:
  Determinanten multipliceres med samme tal
- Addition af et multiplum af en søjle til en anden:
  Determinanten er uændret

Observationer om determinant

Observationer om determinant

- En 0-række eller en 0-søjle:
  Determinanten er 0

Observationer om determinant

- En 0-række eller en 0-søjle:
  Determinanten er 0
- To ens rækker eller to ens søjler:
  Determinanten er 0

Observationer om determinant

- En 0-række eller en 0-søjle:
  Determinanten er 0
- To ens rækker eller to ens søjler:
  Determinanten er 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Eksempler

"Reducer til øvre trekantsmatrix"

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 10 = -10$$

Eksempler

"Reducer til øvre trekantsmatrix"

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 10 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-3) \cdot (-4) = 12$$

Sætning 11 (Produktreglen)
For to kvadratiske n-matricer $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ gælder

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

Sætning 11 (Produktreglen)

For to kvadratiske n-matricer $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ gælder

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

Bevis

For $\mathbf{B}$ fast og $\mathbf{A}$ en rækkeoperationsmatrix er produktreglen netop rækkeregnereglerne. Ved rækkereduktion kan $\mathbf{A}$ skrives som produkt af rækkeoperations-matricer samt enten identitetsmatricen eller en matrix med en 0-række nederst. Produktreglen følger heraf.

Eksempel

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

Eksempel

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$|\mathbf{AA}| = \begin{vmatrix} 15 & 21 & 15 \\ 36 & 51 & 42 \\ 14 & 19 & 24 \end{vmatrix} = |\mathbf{AA}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}| = 12 \cdot 12 = 144$$

Potenser

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -10$$

Potenser

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -10$$

$$\left| \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^k \right| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^k = (-10)^k$$

Sætning 12 (Inversreglen)

En kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ *er invertibel, hvis og kun hvis* $|\mathbf{A}| \neq 0$. *Der gælder*

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

hvis $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Sætning 12 (Inversreglen)
En kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ *er invertibel, hvis og kun hvis* $|\mathbf{A}| \neq 0$. *Der gælder*

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

hvis $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Bevis

Hvis $\mathbf{A}$ er invertibel så giver produktreglen formlen. Hvis $|\mathbf{A}| \neq 0$ så kan $\mathbf{A}$ skrives som produkt af rækkeoperationsmatricer, som hver er invertible. $\mathbf{A}$ er da invertibel.

Eksempel

Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

har determinant

$$|\mathbf{A}| = 12$$

Eksempel

Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

har determinant

$$|\mathbf{A}| = 12$$

$\mathbf{A}$ er invertibel og den inverse har determinant

$$|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1} = \frac{1}{12}$$

Negative potenser

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -10$$

Negative potenser

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 - 2\cdot 3 = -10$$

$$\left| \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \right| = -\frac{1}{10}$$

Negative potenser

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -10$$

$$\left| \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \right| = -\frac{1}{10}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-k} \right| = \frac{1}{(-10)^k}$$

Potensreglen for determinant

Potensreglen for determinant

- Hvis $|\mathbf{A}| \neq 0$ så

$$|\mathbf{A}^k| = |\mathbf{A}|^k$$

for alle hele tal k.

Potensreglen for determinant

- Hvis $|\mathbf{A}| \neq 0$ så

$$|\mathbf{A}^k| = |\mathbf{A}|^k$$

for alle hele tal k.

- Hvis $|\mathbf{A}| = 0$ så

$$|\mathbf{A}^k| = 0$$

for alle hele tal $k > 0$.

Definition

For en differentiabel afbildning $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$

$$(u_1, \ldots, u_n) \mapsto (g_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, g_n(u_1, \ldots, u_n))$$

er ***Jacobideterminanten*** determinanten af Jacobimatricen

$$|d_u(g)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

Eksempel

For afbildning $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$$(u_1, u_2) \mapsto (u_1^2 + u_2^2, u_1 u_2)$$

er Jacobideterminanten

$$|d_u(g)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

$$|d_u(g)| = \begin{vmatrix} 2u_1 & 2u_2 \\ u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 2u_1^2 - 2u_2^2$$

Sætning 13 (Entydig løsning)

1. *Et homogent ligningssystem med en kvadratisk koefficientmatrix* $\mathbf{A}$ *har en egentlig løsning (uendelig mange), hvis og kun hvis* $|\mathbf{A}| = 0$.

Sætning 13 (Entydig løsning)

1. *Et homogent ligningssystem med en kvadratisk koefficientmatrix* $\mathbf{A}$ *har en egentlig løsning (uendelig mange), hvis og kun hvis* $|\mathbf{A}| = 0$.
2. *Det inhomogen ligningssystem*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har en og kun en løsning, hvis og kun hvis $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Opgave

For hvilke tal t har det homogene ligningssystem med koefficientmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

en entydig løsning.

Find løsningsrummet for alle t.

Opgave - løsning

Beregn determinanten

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2$$

Opgave - løsning

Beregn determinanten

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2$$

For $t \neq 1$ har det homogene ligningssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

entydig løsning $\mathbf{x} = 0$.

Opgave - løsning

For $t = 1$ er den reducerede form af ligningssystemet

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Opgave - løsning

For $t = 1$ er den reducerede form af ligningssystemet

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Dette giver løsninger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$