

Definition

februar 2018, LC

En matrix er en ordnet mængde tal opstillet i m rækker og n søjler.

Matricen A kunne være defineret som vist nedenfor. Hvert element i matricen er forsynet med et index, der angiver rækkenummer og søjlenummer. Det første element, der står i række 1 og søjle 1 er derfor benævnt: a_{11} . Når antallet af søjler og rækker er ens, er matricen kvadratisk.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En kvadratisk matrix, der kun har elementer forskellig fra 0 i diagonalen, hedder en

$$\text{Diagonalmatrix: } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

En enheds matrix er en diagonal matrix, hvor alle elementer på diagonalen er lig med 1:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Regneregler

Matricer kan lægges sammen, trækkes fra hinanden og ganges med hinanden.

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & 4 \\ 5 & 12 & 3 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad C := A + B \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 9 \\ 11 & 8 & 6 \\ 11 & 17 & 7 \end{bmatrix}$$

Addition kan lade sig gøre, hvis 2 matricer har det samme antal rækker og søjler. Elementerne lægges sammen hvert for sig. Eksempel:

Subtraktion foregår helt på samme måde.

Multiplikation er lidt mere omstændigt. Dette kan kun lade sig gøre, hvis antallet af søjler i den første matrix er lig med antallet af rækker i den anden matrix. $A1$ og $B1$ er 2 3×3 matricer. Produktet $C1 = A1 \cdot B1$ ønskes. Multiplikationen foregår på følgende måde:

$$A1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad C1 = A1 \cdot B1$$

$$\Rightarrow C1 = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} \end{bmatrix}$$

$A2$ er en 3×2 matrice og $B2$ er en 2×3 matrice. Produktet $A2 \cdot B2$ og $B2 \cdot A2$ ønskes. Multiplikationen foregår på følgende måde:

$$A2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad B2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$A2 \cdot B2$ og $B2 \cdot A2$ er således begge definerede, da antallet af søjler i den første er lig antallet af rækker i den anden.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{12} + a_{31} \cdot b_{13} & a_{12} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{13} \\ a_{11} \cdot b_{21} + a_{21} \cdot b_{22} + a_{31} \cdot b_{23} & a_{12} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{32} \cdot b_{23} \end{bmatrix}$$

Som det ses, er de 2 resultater ikke ens, og der gælder derfor, at faktorenes orden ikke er ligegyldig, når det handler om matricer.

Taleksempel 1

$$A2 := \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \\ 75 & 6 \end{bmatrix} \quad B2 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad A2 \cdot B2 = \begin{bmatrix} 58 & 45 & 54 \\ 88 & 69 & 84 \\ 198 & 255 & 474 \end{bmatrix} \quad B2 \cdot A2 = \begin{bmatrix} 484 & 75 \\ 380 & 117 \end{bmatrix}$$

Taleksempel 2

Et andet taleksempel: $A3 := \begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 & 85 \\ 2 & 13 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ og $B3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 35 & 2 \end{bmatrix}$.

Hverken $A3 \cdot B3$ eller $B3 \cdot A3$ er defineret, da antallet af søjler i den første er 4 og antallet af rækker i den anden er 2.

Determinanter

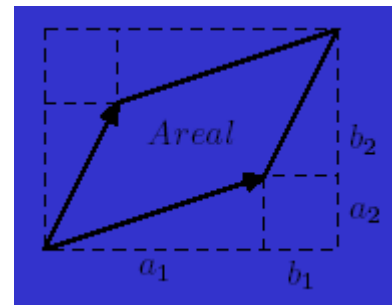
Determinanten for en matrix er en talværdi.

$$AI = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad BI = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$AI := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad BI := \begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 8 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 9 \end{bmatrix} \quad CI := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 8 & 22 \\ 45 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinanten for A1: $|AI| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \Rightarrow |AI| = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \Rightarrow ||AI|| = -10$

Determinanten for en 2 x 2 matrix kan beskrives som et areal:



Determinanten for B1: $BI = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

$$|BI| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} - b_{31} \cdot b_{22} \cdot b_{13} - b_{32} \cdot b_{23} \cdot b_{11} - b_{33} \cdot b_{21} \cdot b_{12}$$

$$5 \cdot 2 \cdot 9 + 6 \cdot 3 \cdot 5 + 9 \cdot 8 \cdot 11 - 5 \cdot 2 \cdot 9 - 11 \cdot 3 \cdot 5 - 9 \cdot 8 \cdot 6 = 285$$

Hvor determinanten for en 2 x 2 matrix kunne beskrives som et areal. kan determinanten for en 3 x 3 matrix beskrives som et rumfang på tilsvarende vis.

$$CI := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 8 & 22 \\ 45 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow ||CI|| = 1.46 \cdot 10^4$$

Determinanten for C1 er noget mere omstændig at regne ud, og ingen ved deres fulde fem ville i dag gøre det ved håndkraft.

Determinanten for en matrix er 0 hvis den indeholder en 0 række eller 0 søjle. Hvis 2 rækker eller søjler er ens, er determinanten også 0.

Lineære ligningssystemer

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = c1$$

$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = c2$$

$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = c3$$

Lineære ligningssystemer kan løses ved hjælp af matricer. Ligningssystemet ovenfor kan skrives som:

$$A \cdot xyz = C \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$$

Dette kan man overbevise sig selv om ud fra reglerne for multiplikation af matricer.

xyz kan da findes ved at gange med A's inverse matrix på begge sider:

$$A^{-1} \cdot A \cdot xyz = A^{-1} \cdot C \quad A^{-1} \cdot A = I \quad I \cdot xyz = xyz \quad \Rightarrow \quad xyz = A^{-1} \cdot C$$

Dette kræver så, at man kan finde den inverse til A.

Inverse matrix:

Den inverse matrix til A er defineret ved: $A \cdot A^{-1} = I$ (Enhedsmatricen)

For en 2 x 2 matrix: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Generelt gælder at $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}A^T$

Elementerne i A^{-1} findes på følgende måde:

- adj A har samme størrelse som A
- Tallet på plads 1,1 findes ved at stryge den række og søjle, som plads 1,1 står i.
- Herefter tages determinanten af det, der bliver tilbage. Her en 2 x 2 matrix.
- Hvert element opløftes til $(-1)^{i+j}$, hvor i og j er nummeret på rækken og søjlen. Dette betyder, at hvert andet led bliver negativt.
- Når alle pladser er fyldt ud, transponeres matricen. Hvilket betyder, at der byttes om på rækker og søjler: A^T .
- Til sidst divideres med determinanten til A
- Heraf følger, at hvis determinanten er 0, har matricen ikke en invers matrix.
- Matricen siges da at være singular.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

Taleksempel 3. En 3 x 3 matrix A haves. Der ønskes den iverse matrix til A:

$$a_{11} := 1 \quad a_{12} := 2 \quad a_{13} := 5 \quad a_{21} := 4 \quad a_{22} := 5$$

$$a_{23} := 6 \quad a_{31} := 7 \quad a_{32} := 8 \quad a_{33} := 9$$

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -3.67 & 2.17 \\ -1 & 4.33 & -2.33 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.5 & -3.67 & 2.17 \\ -1 & 4.33 & -2.33 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Reduktion af lineære ligningssystemer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ x_2 \\ b_{13} \end{bmatrix}$$

$A \cdot x = B$ x_1 og x_2 er ubekendte mens D er en kendt størrelse.

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot D = b_{11}$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot D = x_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot D = b_{13}$$

Da anden række i x er 0, vil resultatet i $A \cdot x$ derfor være 0 i anden række. Så kan vi ligeså godt undvære denne række. Når vi fjerner en række, kan vi fjerne den tilsvarende søjle. Række- og søjle nummer 2 fjernes fra A . Vi danner derfor et modificeret system: $A_{mod} \cdot x_{mod} = B_{mod}$

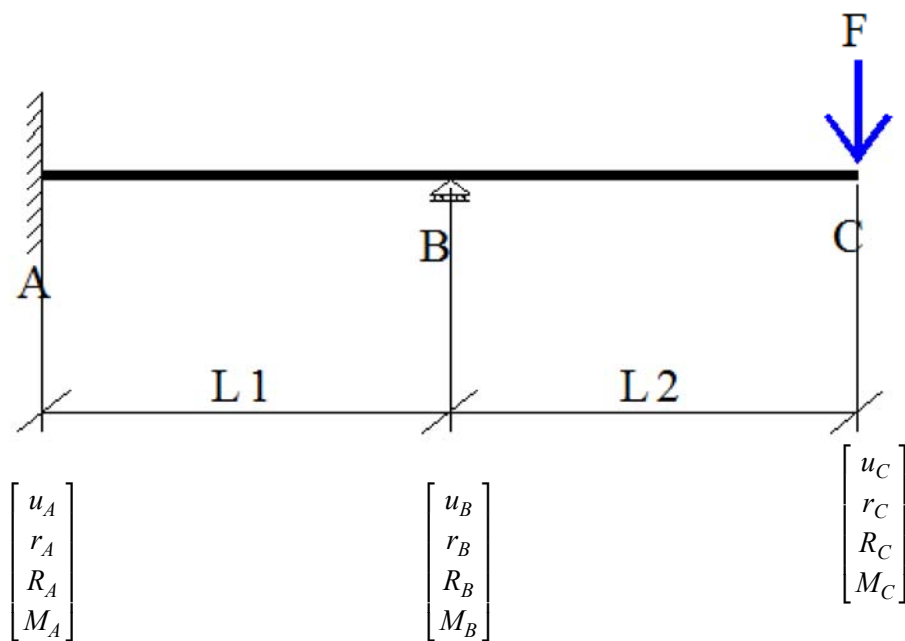
$$A_{mod} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \quad x_{mod} = \begin{bmatrix} x_1 \\ D \end{bmatrix} \quad B_{mod} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{13} \end{bmatrix}$$

$$A_{mod} \cdot x_{mod} = B_{mod} \quad \Rightarrow \quad x_{mod} = A_{mod}^{-1} \cdot B_{mod}$$

Herved findes x_1 (og D). Disse kan nu indsættes i den oprindelige ligning:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ x_2 \\ b_{13} \end{bmatrix} \text{ og herefter kan } x_2 \text{ findes, så begge ubekendte nu er fundet.}$$

Eksempel i løsning af lineære ligningssystemer



u betegner en deformation, r betegner en vinkeldrejning, R betegner en lodret kraft, mens M betegner et moment.

For en bjælke gælder følgende ligning: $K \cdot u = U$. Dette tages som et postulat på nuværende tidspunkt. K matricen tages også blot som givet på nuværende tidspunkt.

$$K = E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_2 \\ u_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} R_A \\ M_A \\ R_B \\ 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi har altså et ligningssystem bestående af 6 ligninger med 6 ubekendte. Såfremt understøtningsforholdene ændrer sig, vil antallet af ubekendt stadig være 6 og kun 6.

Se opgaven på sidste side.

$$K \cdot u = U \quad E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_2 \\ u_3 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A \\ M_A \\ R_B \\ 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}$$

De kendte værdier i ligningen er L, I, E, F.

$K \cdot u = U \Rightarrow u = K^{-1} \cdot U$ Nu er problemet bare, at K er singular, da determinanten er 0. Prøv selv.

Når K og u ganges sammen, vil første søjle i K blive ganget sammen med første række i u. Da første række i u er 0, vil resultatet i $K \cdot u$ derfor være 0 i første række. Så kan vi ligeså godt undvære denne række. Når vi fjerner en række, kan vi fjerne den tilsvarende søjle. Det samme gælder 2. - og 3. række i $K \cdot u$. Række- og søjle nummer 1, 2, og 3 fjernes fra K

Vi danner derfor et modificeret system: $K_{mod} \cdot u_{mod} = U_{mod}$

$$K_{mod} = E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad u_{mod} = \begin{bmatrix} r_2 \\ u_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad U_{mod} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{mod} \cdot u_{mod} = U_{mod} \Rightarrow u_{mod} = K_{mod}^{-1} \cdot U_{mod}$$

Her findes så elementerne i u_{mod} , hvilket vil sige element nummer 4, 5, og 6 i u .

Hele u vektoren er nu kendt, så vi kan blot løse den oprindelige ligning: $K \cdot u = U$. Dette giver os alle resultaterne i U , og alle de ubekendte er nu fundet.

$$u_{mod} = \left(E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot I} \\ \frac{7 \cdot F \cdot L^3}{12 \cdot E \cdot I} \\ \frac{-3 \cdot F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot I} \end{bmatrix}$$

Vinkeldrejning i knude 3
Udbøjning i knude 3
Vinkeldrejning i knude 3

$$E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{4} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F \\ \frac{7}{12} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot F \\ \frac{-3}{4} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot F}{2} \\ \frac{F \cdot L}{2} \\ \frac{-5 \cdot F}{2} \\ 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lodret reaktion i A
 Indspændingsmoment i A
 Lodret reaktion i B
 Belastningen

$$E := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$$

$$I := 36.9 \cdot 10^6 \cdot mm^4$$

$$L := 5000 \cdot mm$$

$$F := 8000 \cdot N$$

Reaktioner regnes positivt nedad

$$\text{Vinkeldrejning i B: } \frac{-1}{4} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F = -0.37 \text{ deg}$$

$$\text{Udbøjning i C: } \frac{7}{12} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot F = 75.28 \text{ mm}$$

$$\text{Vinkeldrejning i C: } \frac{-3}{4} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F = -1.11 \text{ deg}$$

$$\text{Lodret reaktion i A: } \frac{3}{2} \cdot F = 12 \text{ kN}$$

$$\text{Indspændingsmoment i A: } \frac{-1}{2} \cdot L \cdot F = -20 \text{ kN} \cdot m$$

$$\text{Lodret reaktion i B: } \frac{-5}{2} \cdot F = -20 \text{ kN}$$

Opgaver

1)

Udregn manuelt disse multiplikationer og kontrollér resultaterne

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 3 \ -5 \ 3] \qquad [1 \ 3 \ -5 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2)

Find determinanten og den inverse matrix af disse matricer manuelt og kontroller resultatet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -5 & 17 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 9 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3)

Løs følgende ligningssystem:

$$x + 5 \cdot y + 3 \cdot z = 20 \qquad 5 \cdot x - 6 \cdot y - 8 \cdot z = 3 \cdot x - 34 \qquad 8 \cdot x - 12 \cdot y + 16 \cdot z = 32$$

4)

Løs opgaven som en matrix beregning.

Facit:

Stella (S), Yvonne (Y), Gladys (G), Johnny (J) og Brian (B) skal dele en portion æbler.

$$S := 3$$

Der er i alt 25 æbler.

$$Y := 6$$

Stella, Yvonne og Gladys får tilsammen 7 æbler flere end Johnny og Brian.

$$G := 7$$

Stella og Johnny får tilsammen det samme antal æbler som Gladys.

$$J := 4$$

Gladys og Brian får tilsammen 12 æbler.

$$B := 5$$

Yvonne får 2 æbler mere end Johnny.

Hvor mange æbler får de 5 hver især?

5)

Gennemgå eksemplet ovenfor med bjælken hvor K-matricen er uændret og u-vektoren samt U-vektoren er ændrede: (Hvilken ændring betyder dette for bjælkens statiske system)

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \\ r_2 \\ u_3 \\ r_3 \end{bmatrix}$$