Undervisningsnotat. Matricer

AARHUS UNIVERSITET
INGENIØRHØJSKOLEN

januar2016, LC

Definition

En matrix er en ordnet mængde tal opstillet i m rækker og n søjler.
Matricen A kunne være defineret som vist nedenfor. Hvert element i matricen er forsynet med et index, der angiver rækkernummer og søjlenummer. Det første element, der står i række 1 og søjle 1 er derfor benævnt: a_{11}. Når antallet af søjler og rækker er ens, er matricen kvadratisk.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En kvadratisk matrix, der kun har elementer forskellig fra 0 i diagonalen, hedder en

$$\text{Diagonalmatrix:}\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En enheds matrix er en diagonal matrix, hvor alle elementer på diagonalen er lig med 1:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regneregler

Matricer kan lægges sammen, trækkes fra hinanden og ganges med hinanden.

Adition kan lade sig gøre, hvis 2 matricer har det samme antal rækker og søjler.
Elementerne lægges sammen hvert for sig. Eksempel:

$$\mathrm{A} := \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & 4 \\ 5 & 12 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} := \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} := \mathrm{A} + \mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 9 \\ 11 & 8 & 6 \\ 11 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

Subtraktion foregår helt på samme måde.

Multiplikation er lidt mere omstændigt. Dette kan kun lade sig gøre, hvis antallet af søjler i den første matrix er lig med antallet af rækker i den anden matrix. A1 og B1 er 2 3x3 matricer. Produktet $C1 = A1 \cdot B1$ ønskes. Multiplikationen foregår på følgende måde:

$$A1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad C1 = A1 \cdot B1$$

$$\Rightarrow \quad C1 = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} \end{pmatrix}$$

A2 er en 3x2 matrice og B2 er en 2x3 matrice. Produktet $A2 \cdot B2$ og $B2 \cdot A2$ ønskes. Multiplikationen foregår på følgende måde:

$$A2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$A2 \cdot B2$ og $B2 \cdot A2$ er således begge definerede, da antallet af søjler i den første er lig antallet af rækker i den anden.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{12} + a_{31} \cdot b_{13} & a_{12} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{13} \\ a_{11} \cdot b_{21} + a_{21} \cdot b_{22} + a_{31} \cdot b_{23} & a_{12} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{32} \cdot b_{23} \end{pmatrix}$$

Som det ses, er de 2 resultater ikke ens, og der gælder derfor, at faktorernes orden ikke er ligegyldig, når det handler om matricer.

Taleksempel 1

$$A2 := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \\ 75 & 6 \end{pmatrix} \qquad B2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad A2 \cdot B2 = \begin{pmatrix} 58 & 45 & 54 \\ 88 & 69 & 84 \\ 198 & 255 & 474 \end{pmatrix} \qquad B2 \cdot A2 = \begin{pmatrix} 484 & 75 \\ 380 & 117 \end{pmatrix}$$

Taleksempel 2

Et andet taleksempel: $A3 := \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 & 85 \\ 2 & 13 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ og $B3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 35 & 2 \end{pmatrix}$.

Hverken $A3 \cdot B3$ eller $B3 \cdot A3$ er defineret, da antallet af søjler i den første er 4 og antallet af rækker i den anden er 2.

Determinanter

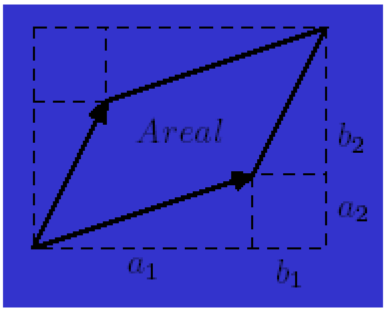
Determinanten for en matrix er en talværdi.

$$A1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A1 := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B1 := \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 8 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 9 \end{pmatrix} \qquad C1 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 8 & 22 \\ 45 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinanten for A1: $|A1| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \quad \Rightarrow \quad |A1| := 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad |A1| = -10$

Determinanten for en 2 x 2 matrix kan beskrives som et areal:



Determinanten for B1: $B1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$|B1| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} - b_{31} \cdot b_{22} \cdot b_{13} - b_{32} \cdot b_{23} \cdot b_{11} - b_{33} \cdot b_{21} \cdot b_{12}$$

$$5 \cdot 2 \cdot 9 + 6 \cdot 3 \cdot 5 + 9 \cdot 8 \cdot 11 - 5 \cdot 2 \cdot 9 - 11 \cdot 3 \cdot 5 - 9 \cdot 8 \cdot 6 = 285$$

Hvor determinanten for en 2 x 2 matrix kunne beskrives som et areal. kan determinnanten for en 3 x 3 matrix beskrives som et rumfang på tilsvarende vis.

Determinanten for C1 er noget mere omstændig at regne ud, og ingen ved deres fulde fem ville i dag gøre det ved håndkraft.

$$C1 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 8 & 22 \\ 45 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |C1| = 1.46 \times 10^4$$

Determinanten for en matrix er 0 hvis den indeholder en 0 række eller 0 søjle.
Hvis 2 rækker eller søjler er ens, er determinanten også 0.

Lineære ligningssystemer

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = c1$$

$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = c2$$

$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = c3$$

Lineære ligningssystemer kan løses ved hjælp af matricer. Ligningssystemet ovenfor kan skrives som:

$$A \cdot xyz = C \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix}$$

Dette kan man overbevise sig selv om ud fra reglerne for multiplikation af matricer.

xyz kan da findes ved at gange med A's inverse matrix på begge sider:

$$A^{-1} \cdot A \cdot xyz = A^{-1} \cdot C \qquad A^{-1} \cdot A = I \qquad I \cdot xyz = xyz \qquad \Rightarrow \qquad xyz = A^{-1} \cdot C$$

Dette kræver så, at man kan finde den inverse til A.

Inverse matrix:

Den inverse matrix til A er defineret ved: $A \cdot A^{-1} = I$ (Enhedsmatricen)

For en 2 x 2 matrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{22}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Generelt gælder at $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adjA^T$

Elementerne i adjA findes på følgende måde:

- adj A har samme størrelse som A
- Tallet på plads 1,1 findes ved at stryge den række og søjle, som plads 1,1 står i.
- Herefter tages determinanten af det, der bliver tilbage. Her en 2 x 2 matrix.
- Hvert element opløftes til $(-1)^{i+j}$, hvor i og j er nummeret på rækken og søjlen. Dette betyder, at hvert andet led bliver negativt.
- Når alle pladser er fyldt ud, transponeres matricen. Hvilket betyder, at der byttes om på rækker og søjler: A^T.
- Til sidst divideres med determinanten til A
- Heraf følger, at hvis determinanten er 0, har matricen ikke en invers matrix.
- Matricen siges da at være singulær.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} \left|\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| & -\left|\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right| & \left|\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right| \\ -\left|\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| & \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right| & -\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right| \\ \left|\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right| & -\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}\right| & \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| \end{bmatrix}^T$$

Taleksempel 3. En 3 x 3 matrix A haves. Der ønskes den iverse matrix til A:

$a_{11} := 1$ $a_{12} := 2$ $a_{13} := 5$ $a_{21} := 4$ $a_{22} := 5$

$a_{23} := 6$ $a_{31} := 7$ $a_{32} := 8$ $a_{33} := 9$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -3.67 & 2.17 \\ -1 & 4.33 & -2.33 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} \left|\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| & -\left|\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right| & \left|\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right| \\ -\left|\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| & \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right| & -\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right| \\ \left|\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right| & -\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}\right| & \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| \end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0.5 & -3.67 & 2.17 \\ -1 & 4.33 & -2.33 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Reduktion af lineære ligningssystemer

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x1 \\ 0 \\ D \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ x2 \\ b_{13} \end{pmatrix}$$

$A \cdot x = B$ x1 og x2 er ubekendte mens D er en kendt størrelse.

$$a_{11} \cdot x1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot D = b_{11}$$

$$a_{21} \cdot x1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot D = x2$$

$$a_{31} \cdot x1 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot D = b_{13}$$

Da anden række i x er 0, vil resultatet i $A \cdot x$ derfor være o i anden række. Så kan vi ligeså godt undvære denne række. Når vi fjerner en række, kan vi fjerne den tilsvarende søjle. Række- og søjle nummer 2 fjernes fra A
Vi danner derfor et modificeret system: $A_{mod} \cdot x_{mod} = B_{mod}$

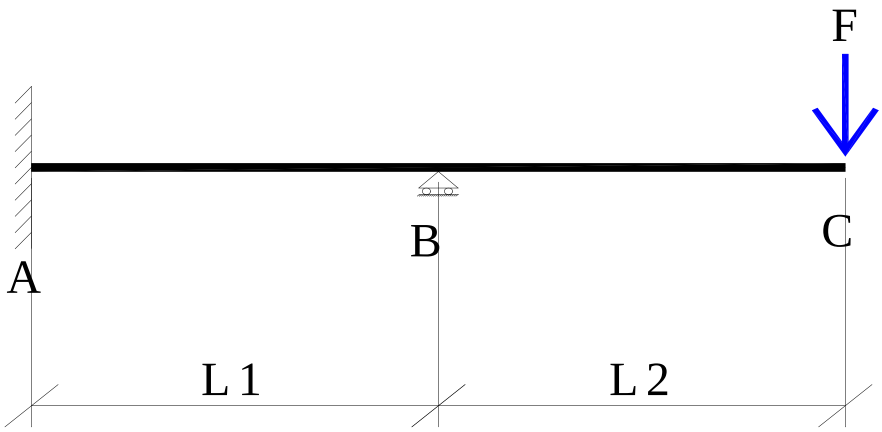
$$A_{mod} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad x_{mod} = \begin{pmatrix} x1 \\ D \end{pmatrix} \qquad B_{mod} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{13} \end{pmatrix}$$

$$A_{mod} \cdot x_{mod} = B_{mod} \qquad \Rightarrow \qquad x_{mod} = A_{mod}^{-1} \cdot B_{mod}$$

Herved findes x1 (og D). Disse kan nu indsættes i den oprindelige ligning:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ 0 \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ x2 \\ b_{13} \end{pmatrix}$$ og herefter kan x2 findes, så begge ubekendte nu er fundet.

Eksempel i løsning af lineære ligningssystemer



$$\begin{pmatrix} u_A \\ r_A \\ R_A \\ M_A \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_B \\ r_B \\ R_B \\ M_B \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_C \\ r_C \\ R_C \\ M_C \end{pmatrix}$$

u betegner en deformation, r betegner en vinkeldrejning, R betegner en lodret kraft, mens M betegner et moment.
For en bjælke gælder følgende ligning: $K \cdot u = U$. Dette tages som et postulat på nuværende tidspunkt. K matricen tages også blot som givet på nuværende tidspunkt.

$$K = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_2 \\ u_3 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} R_A \\ M_A \\ R_B \\ 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi har altså et ligningssystem bestående af 6 ligninger med 6 ubekendte. Såfremt understøtningsforholdene ændre sig, vil antallet af ubekendt stadig være 6 og kun 6.
Se opgaven på sidste side.

$K \cdot u = U$

$$E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_2 \\ u_3 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_A \\ M_A \\ R_B \\ 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

De kendte værderi i ligningen er L, I, E, F.

$K \cdot u = U \quad \Rightarrow \quad u = K^{-1} \cdot U$ Nu er problemet bare, at K er singulær, da determinmanten er 0. Prøv selv.

Når K og u ganges sammen, vil første søjle i K blive ganget sammen med første række i u. Da første række i u er 0, vil resultatet i $K \cdot u$ derfor være o i første række. Så kan vi ligeså godt undvære denne række. Når vi fjerner en række, kan vi fjerne den tilsvarende søjle.Det samme gælder 2. - og 3. række i $K \cdot u$. Række- og søjle nummer 1, 2, og 3 fjernes fra K

Vi danner derfor et modificeret system: $K_{mod} \cdot u_{mod} = U_{mod}$

$$K_{mod} = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \qquad u_{mod} = \begin{pmatrix} r_2 \\ u_3 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad U_{mod} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{mod} \cdot u_{mod} = U_{mod} \quad \Rightarrow \quad u_{mod} = K_{mod}^{-1} \cdot U_{mod}$$

Her findes så elementerne i u_{mod}, hvilket vil sige element nummer 4, 5, og 6 i u.

Hele u vektoren er nu kendt, så vi kan blot løse den oprindelige ligning: $K \cdot u = U$. Dette giver os alle resultaterne i U, og alle de ubekendte er nu fundet.

$$u_{mod} = \left[E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot I} \\ \frac{7 \cdot F \cdot L^3}{12 \cdot E \cdot I} \\ -\frac{3 \cdot F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot I} \end{pmatrix}$$

Vinkeldrejning i knude 3

Udbøjning i knude 3

vinkeldrejning i knude 3

$$E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{4} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F \\ \frac{7}{12} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot F \\ \frac{-3}{4} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot F}{2} \\ -\frac{F \cdot L}{2} \\ -\frac{5 \cdot F}{2} \\ 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lodret reaktion i A

Indspændingsmoment i A

Lodret reaktion i B

Belastningen

$E := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$ $\quad I := 36.9 \cdot 10^6 \cdot mm^4$ $\quad L := 5000 \cdot mm$ $\quad F := 8000 \cdot N$

Reaktioner regnes positivt nedad

Vinkeldrejning i B: $\frac{-1}{4} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F = -0.37\, deg$ $\qquad \frac{7}{12} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot F = 75.28\, mm$

Vinkeldrejning i C: $\frac{-3}{4} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F = -1.11\, deg$ $\qquad$ Lodret reaktion i A: $\frac{3}{2} \cdot F = 12\, kN$

Udbøjning i C:

Indspændingsmoment i A: $\frac{-1}{2} \cdot L \cdot F = -20\, kN \cdot m$ $\qquad$ Lodret reaktion i B: $\frac{-5}{2} \cdot F = -20\, kN$

Opgaver

1)
Udregn manuelt disse multiplikationer og kontrollér resultaterne

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2)
Find determinanten og den inverse matrix af disse matricer manuelt og kontroller resultatet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 9 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 5 & -6 \\ 5 & 4 & -8 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

3)
Løs følgende ligningssystem:

$$x + 5 \cdot y + 3 \cdot z = 20 \qquad 5 \cdot x - 6 \cdot y - 8 \cdot z = 3 \cdot x - 34 \qquad 8 \cdot x - 12 \cdot y + 16 \cdot z = 32$$

4)
Gennemgå eksemplet ovenfor med bjælken hvor K-matricen er uændret og u-vektoren samt U-vektoren er ændrede: (Hvilken ændring betyder dette for bjælkens statiske system)

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \\ r_2 \\ u_3 \\ r_3 \end{pmatrix}$$