$with(LinearAlgebra):$

Løsning af ligninger

Et system af ligninger kan løses ved at benytte den inverse matrice. Når det samlede ligningssystem er er opstillet vil der som regel være en stivhedsmarice med mange nuller.

$$A := \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}:$$

Lad as tage den inverse

A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \frac{831}{3542} & -\frac{596}{1771} & \frac{6}{253} & -\frac{108}{1771} & \frac{270}{1771} & -\frac{288}{1771} & \frac{162}{1771} & -\frac{36}{1771} \\ -\frac{596}{1771} & \frac{1490}{1771} & -\frac{15}{253} & \frac{270}{1771} & -\frac{675}{1771} & \frac{720}{1771} & -\frac{405}{1771} & \frac{90}{1771} \\ \frac{6}{253} & -\frac{15}{253} & \frac{7}{253} & -\frac{18}{253} & \frac{45}{253} & -\frac{48}{253} & \frac{27}{253} & -\frac{6}{253} \\ -\frac{108}{1771} & \frac{270}{1771} & -\frac{18}{253} & \frac{1873}{8855} & -\frac{51}{1771} & \frac{272}{8855} & -\frac{153}{8855} & \frac{34}{8855} \\ \frac{270}{1771} & -\frac{675}{1771} & \frac{45}{253} & -\frac{51}{1771} & \frac{255}{3542} & -\frac{136}{1771} & \frac{153}{3542} & -\frac{17}{1771} \\ -\frac{288}{1771} & \frac{720}{1771} & -\frac{48}{253} & \frac{272}{8855} & -\frac{136}{1771} & \frac{5448}{8855} & -\frac{6129}{17710} & \frac{681}{8855} \\ \frac{162}{1771} & -\frac{405}{1771} & \frac{27}{253} & -\frac{153}{8855} & \frac{153}{3542} & -\frac{6129}{17710} & \frac{16857}{35420} & -\frac{1873}{17710} \\ -\frac{36}{1771} & \frac{90}{1771} & -\frac{6}{253} & \frac{34}{8855} & -\frac{17}{1771} & \frac{681}{8855} & -\frac{1873}{17710} & \frac{1192}{8855} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Det ses at antallet af nuller er faldet hvilket fører til mange regneoperatoner i opbygningen af matricen. I stedet søger vi efter andre metoder.

Gauss Elimination

Idèen bag en Gauss elimination er først at skabe en øvre triangelmatrice og derefter løse ligningerne succesivt nedefra og op. Dette illustreres med et eksempel

Betragt ligningssytemet:

$18 \cdot x_1 - 6\, x_2 - 6 \cdot x_3 = 60.0 :$

$-6 \cdot x_1 + 12\, x_2 - 6 \cdot x_4 = 0.0 :$

$-6 \cdot x_1 + 12 \cdot x_3 - 6 \cdot x_4 = 20.0 :$

$0 \cdot x_1 - 6\, x_2 - 6 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4 = 0.0 :$

På matriceform bliver dette

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

Den øverste ligning multipliceres med 6/18.

$$\frac{6}{18} \cdot 18 \cdot x_1 - \frac{6}{18} \cdot 6\, x_2 - \frac{6}{18} \cdot 6 \cdot x_3 = \frac{6}{18} \cdot 60.0$$

$$6\, x_1 - 2\, x_2 - 2\, x_3 = 20.0000 \qquad \textbf{(1.1)}$$

Denne ligning adderes nu til ligning 2 og 3 og ligningssystemet bliver dermed:

$18 \cdot x_1 - 6\, x_2 - 6 \cdot x_3 = 60.0 :$

$10\, x_2 - 2 \cdot x_3 - 6 \cdot x_4 = 20.0 :$

$-2 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 - 6 \cdot x_4 = 40.0 :$

$6\, x_2 - 6 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4 = 0.0 :$

og på matriceform

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

Den anden ligning multipliceres nu med $\frac{2}{10}$ og desuden $\frac{6}{10}$

$$\frac{2}{10} \cdot 10\, x_2 - \frac{2}{10} \cdot 2 \cdot x_3 - \frac{2}{10} \cdot 6 \cdot x_4 = \frac{2}{10} \cdot 20.0$$

$$2\, x_2 - \frac{2}{5}\, x_3 - \frac{6}{5}\, x_4 = 4.0000 \qquad \textbf{(1.2)}$$

$$\frac{6}{10} \cdot 10\, x_2 - \frac{6}{10} \cdot 2 \cdot x_3 - \frac{6}{10} \cdot 6 \cdot x_4 = \frac{6}{10} \cdot 20.0$$

$$6\, x_2 - \frac{6}{5}\, x_3 - \frac{18}{5}\, x_4 = 12.0000 \qquad \textbf{(1.3)}$$

Og adderes en gang til ligning 3 og den anden trækkes en gang fra ligning 4. Herefter ser ligningssytemet sådan ud:

$18 \cdot x_1 - 6\, x_2 - 6 \cdot x_3 = 60.0 :$

$10\, x_2 - 2 \cdot x_3 - 6 \cdot x_4 = 20.0 :$

$$\frac{48.0}{5} \cdot x_3 - \frac{36.0}{5} \cdot x_4 = 44.0$$

$$9.6000\ x_3 - 7.2000\ x_4 = 44.0000 \quad \mathbf{(1.4)}$$

$$-\frac{36.0}{5} \cdot x_3 + \frac{42.0}{5} \cdot x_4 = 12.0$$

$$-7.2000\ x_3 + 8.4000\ x_4 = 12.0000 \quad \mathbf{(1.5)}$$

På matriceform fås

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9.6 & -7.2 \\ 0 & 0 & -7.2 & 12 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 44 \\ 12 \end{bmatrix} :$$

Den tredje ligning multipliceres nu med $\frac{7.2}{9.6}$:

$$\frac{7.2}{9.6} \cdot 9.6000\ x_3 - \frac{7.2}{9.6} \cdot 7.2000\ x_4 = \frac{7.2}{9.6} \cdot 44.0000$$

$$7.2000\ x_3 - 5.4000\ x_4 = 33.0000 \quad \mathbf{(1.6)}$$

Og adderes til den sidste ligning

$$\left(\frac{42.0}{5} - 5.4 \right) \cdot x_4 = 12.0 + 33$$

$$3.0000\ x_4 = 45.0000 \quad \mathbf{(1.7)}$$

På matriceform bliver ligningssystemet nu

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9.6 & -7.2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 44 \\ 45 \end{bmatrix} :$$

Betragtes den nederste ligning

$3 \cdot x_4 = 45 :$

Fås

$x_4 = 15 :$

Indsættes dette iden tredje ligning

$9.6 \cdot x_3 + -7.2 \cdot 15 = 44 :$

Der giver

$$x_3 := \frac{44 + 15 \cdot 7.2}{9.6}$$

$$15.83333333 \quad \mathbf{(1.8)}$$

Osv

Ved benyttelse af den inverse matrice fåes:

$$A := \begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{bmatrix}:$$

$$b := \begin{bmatrix} 60.0 \\ 0.0 \\ 20.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}:$$

$x := A^{-1}.b$

$$\begin{bmatrix} 13.333 \\ 14.167 \\ 15.833 \\ 15.000 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Der giver det samme.

Opgave

Løs følgende ligningssystem både ved at benytte Maple Solve funktionen, den inverse matrice samt ved Gauss elimination

$8 \cdot x_1 - 6\, x_2 - 6 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 - 3\, x_5 = 10.0 :$

$2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 - 6 \cdot x_4 - 7 \cdot x_5 = 20.0 :$

$-2 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 - \cdot x_4 = 30.0 :$

$6\, x_2 - 3 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4 + 13 \cdot x_5 = 40.0 :$

$3\, x_1 + 21 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4 + 13 \cdot x_5 = 50.0 :$